Theoretische und experimentelle Untersuchungen an logarithmisch periodischen Antennen

INAUGURAL - DISSERTATION
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Philipps-Universität Marburg

vorgelegt von

Joachim Wolter

aus Neustadt/Holst.

Marburg 1969

Kleinoffsetdruck: Görich & Weiershäuser, Marburg

Theoretische und experimentelle Untersuchungen an logarithmisch periodischen Antennen

INAUGURAL - DISSERTATION
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Philipps-Universität Marburg

vorgelegt von

Joachim Wolter

aus Neustadt/Holst.

Marburg 1969

Kleinoffsetdruck: Görich & Weiershäuser, Marburg

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Gedruckt mit Unterstützung des
Marburger Universitätsbundes

Von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Philipps-Universität Marburg/Lahn als

Dissertation angenommen am · 2. Mai 1969

Tag der mündlichen Prüfung am 14. Mai 1969

Berichterstatter : Doz. Dr.S.Blume
Mitberichterstatter: Prof.Dr.G.Eckart (Saarbrücken)

Liste der verwendeten Formelzeichen

x,y,z	kartesisches Koordinatensystem
ϱ,x,y	Zylinderkoordinatensystem
r,ϑ,φ	Kugelkoordinatensystem
a,b	Indizes zur Kennzeichnung verschiedener Antennenarme bzw. reelle Variable
c	Lichtgeschwindigkeit
$c_1 \ldots c_6$	Konstanten
dl	Halbe Breite des Speiseschlitzes der Antennenrohre
d_{nv}	Achsenabstand der Strahler n und v
d_n	ist identisch mit $d_{n,n+1}$
f,f_n,g	Frequenz bzw. Funktionssymbol
h_n	Halbe Elementlänge des Strahlers n
j	Summationsindex
k_o	Wellenzahl
k_y	Separationsparameter
l_n	Abstand des Elements n vom Speisepunkt der Antenne
ln	logarithmus naturalis
m,n	Summationsindizes
q	Kugelradius
r_n	Abstand n-ter Strahler-Feldaufpunkt bzw. Radius
s	Summationsindex
t	Zeitvariable bzw. Integrationsvariable
v	Summationsindex
w	komplexe Variable
A_{ns}	Fourierentwicklungskoeffizienten
$B_n(k_y)$	Koeffizienten
C_n,D_n	Funktionssymbole
$\mathbf{E}$	komplexe Amplitude der elektrischen Feldstärke
$E_r,E_y,\ldots$	Komponenten der komplexen Amplitude der elektrischen Feldstärke
G_{mv}	Fourierentwicklungskoeffizienten
$\mathbf{H}$	komplexe Amplitude der magnetischen Feldstärke
$H_x,\ldots$	Komponenten der komplexen Amplitude der magnetischen Feldstärke
$H_\nu^{(2)}$	Hankelsche Funktion 2.Art, ν-ter Ordnung
I_n	komplexe Amplitude des Antennenstroms
INT	Bezeichnung eines Integrals

$\vec{s}$	Stromdichte
J_ν	Besselsche Funktion ν-ter Ordnung
K_{jn}	mit Hilfe der Leitungsgleichungen definierte, reelle Koeffizienten
N	Anzahl der Antennenelemente
N_o	Neumannsche Funktion nullter Ordnung
P,Q	Feldaufpunkte
R_n	Radius
R_o	Abstand Koordinatenursprung-Aufpunkt ($=r_n$)
Re	Realteil
S	aufgenommene Leistung der Antenne
U_n	komplexe Amplitude der Speisespannung des n-ten Antennenelements
Y	allgemeine Zylinderfunktion
W_{mvjs} Z_{mvjs}	Strahlungskopplungskoeffizienten
Z_{ein}	Eingangswiderstand der Antenne
Z_d, Z_s	Impedanzen
Z_L	Wellenwiderstand der Speiseleitung
α	Öffnungswinkel log-per. Antennen
α_o	Phasenkonstante
β_o	Dämpfungskonstante
γ	Eulersche Konstante
γ_o	Wellenfortpflanzungsmaß
δ	Stromphase
$\varepsilon, \varepsilon_o$	Dielektrizitätskonstanten
η, ξ	Winkel
λ	Wellenlänge
μ_o	Permeabilitätskonstante
ν	Ordnung der Zylinderfunktionen
ϱ_{on}	Radius des n-ten Antennenrohres
ϱ_n	Abstand des Feldaufpunkts von der n-ten Antennenachse
σ	Ausdehnungsparameter bei log-per. Antennen
τ	Maßstabsfaktor, außerdem stationärer Punkt
ϑ	Winkel
Ψ	Winkel zwischen zwei Antennenarmen
ω	Kreisfrequenz
Δ	Delta-Operator

Δf	Halbwertsbreite
Π	komplexe Amplitude des Hertzschen Vektors
$\Pi_{x_a}, \Pi_{y}, \ldots$	Komponenten der komplexen Amplitude des Hertzschen Vektors
Π	y-Komponente der komplexen Amplitude des Hertzschen Vektors

Inhaltsverzeichnis.

		Seite
1.	Einleitung.	3
2.	Überblick über bisherige Entwicklungen von Breitbandantennen.	5
2.1.	Frühe Entwicklungen.	5
2.2.	Logarithmische Spiralantennen.	8
2.3.	Logarithmisch periodische Antennen.	9
2.4.	Weiterentwicklungen.	12
3.	Theorie der logarithmisch periodischen Dipolantenne.	14
4.	Verfahren zur numerischen Auswertung der Theorie.	37
5.	Aufbau der Meßeinrichtungen.	43
5.1.	Stromverteilungsmessungen.	43
5.2.	Messungen der Richtdiagramme.	45
5.3.	Impedanzmessungen.	46
6.	Ergebnisse der Rechnungen und Messungen.	48
6.1.	Wahl der Parameter und mechanische Konstruktion der Antenne.	48
6.2.	Antenneneingangsströme entlang der Speiseleitung.	49
6.3.	Konvergenz der numerischen Auswertung.	54
6.4.	Stromverteilung auf den einzelnen Antennenelementen.	56
6.5.	Richtdiagramme.	60
6.6.	Eingangswiderstände.	65
7.	Optimierung bezüglich des Gewinns.	67
7.1.	Optimierung für N = 3.	68
7.2.	Optimierung für N = 12.	69

		Seite
8.	Eigenschaften einer optimalen logarithmisch periodischen Dipolantenne.	72
8.1.	Ergebnisse der Rechnungen und Messungen.	72
8.2.	Abhängigkeit der Antenneneigenschaften vom Dielektrikum der Speiseleitung.	75
9.	Logarithmisch periodische V-Antennen.	82
9.1.	Berechnung der Richtdiagramme bei bekannter Stromverteilung.	82
9.2.	Ergebnisse der Rechnungen und Messungen.	93
10.	Zusammenfassung.	98
	Literaturverzeichnis.	100
	Lebenslauf.	106

Anhang: ALGOL-Programme zu den in der Arbeit durchgeführten numerischen Rechnungen.

1. Einleitung

Logarithmisch periodische Breitbandantennen haben seit 1960 im kommerziellen Bereich immer mehr an Bedeutung gewonnen. Sie werden dort vor allem als breitbandige Kurzwellensendeantennen sowie zur Frequenzüberwachung eingesetzt. Unter ihnen hat die log-per. Dipolantenne mit ihren verschiedenen Modifikationen einen hervorragenden Platz eingenommen. Die theoretische Beschreibung derartiger Antennen hat mit der durch die beachtlichen Erfolge außerordentlich schnell vorangetriebenen experimentellen Entwicklung nicht Schritt halten können. Näherungsrechnungen aufgrund leitungstheoretischer Überlegungen haben zwar zusammen mit Meßergebnissen wesentlich zu einem besseren Verständnis der Arbeitsweise log-per. Antennen beigetragen und es sogar gestattet, Richtlinien für die Dimensionierung derartiger Breitbandantennen zu geben; sie sind jedoch keine mathematisch strengen Lösungen des Antennenrandwertproblems.

In einer früheren Arbeit des Verfassers [1] wurden erstmals die Grundzüge einer strengen Feldtheorie der log-per. Dipolantenne entwickelt und für zwei spezielle Sätze von Parametern numerisch ausgewertet. Diese Theorie wird nun in der vorliegenden Arbeit weiter ausgebaut. Insbesondere wird das Fernfeld der log-per. Dipolantenne exakt mit Hilfe der Methode der stationären Phase berechnet, so daß die in [1] noch vorhandene Lücke geschlossen werden kann. Weiterhin erfolgt im Rahmen dieser strengen Theorie zum ersten Mal eine numerische Berechnung der Stromverteilung auf den einzelnen Antennenelementen. Außerdem werden bessere Näherungen in der numerischen Rechnung verwendet. Die Konvergenz des benutzten Näherungsverfahrens wird anhand der numerischen Ergebnisse untersucht.

Ein eingehender Vergleich der rechnerischen Ergebnisse mit den Meßergebnissen ergibt eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Experiment und Rechnung. Damit sind die Voraussetzungen gegeben, direkt durch numerische Rechnungen neue Erkenntnisse über log-per. Dipolantennen zu gewinnen. Vor allem lassen sich Aussagen über das Problem der Optimierung machen.

Eine spezielle Optimierung wird vorgenommen. Als Kriterien dienen die Halbwertsbreiten und die Vorrückverhältnisse der Richtdiagramme. Die berechneten Eigenschaften einer auf diese Weise durch numerische Rechnungen gewonnenen optimalen Antenne werden experimentell überprüft. Auch hier zeigen Experiment und Rechnung sehr gute Übereinstimmung.

Zu einer noch stärkeren Bündelung der Strahlungsenergie kann man gelangen, wenn man V-Antennen als Einzelelemente der log-per. Struktur verwendet und diese in höheren Resonanzen betreibt. In der oben zitierten Arbeit wurde eine experimentell entwickelte, in Bezug auf Bandbreite, Richtwirkung und geometrische Abmessungen besonders günstige log-per. V-Antenne beschrieben, die im $\lambda/2$- und im $3\lambda/2$-Mode betrieben werden kann. Eine mathematisch formulierte Begründung für die Wahl der Antennenparameter konnte bisher nicht gegeben werden. In dieser Arbeit nun wird eine Theorie zur Berechnung der Richtdiagramme der log-per.V-Antenne bei bekannter Stromverteilung hergeleitet. Der in Bezug auf Halbwertsbreite und Nebenzipfeldämpfung der Richtdiagramme günstigste Öffnungswinkel der einzelnen V-förmigen Antennenelemente läßt sich dann mit Hilfe dieser Theorie rein rechnerisch bestimmen. Die geringen Abmessungen dieser Antenne sind ein bemerkenswerter Vorteil gegenüber den bisherigen log-per. Antennen.

2. Überblick über bisherige Entwicklungen von Breitbandantennen.

In der Praxis sind Antennen erwünscht, deren Richtdiagramme und Speisepunktswiderstände über einen gewissen Frequenzbereich nahezu konstant bleiben. Infolge der Vielzahl der gewünschten Anwendungsmöglichkeiten gibt es keine einheitliche Definition einer Breitbandantenne. Die geforderte Bandbreite kann variieren von einigen Hz in einem Telegrafieübertragungskanal bis zu etwa 6 MHz für einen Fernsehkanal. Bei Mehrkanalbetrieb sind entsprechend größere Bandbreiten erforderlich. Für Frequenzüberwachungsanlagen werden sogar Bandbreiten von 10^6:1 benötigt.

2.1. Frühe Entwicklungen.

Die ersten Breitbandantennen mit nahezu konstanten Eigenschaften in einem Frequenzbereich von mehr als einer Oktave waren Langdrahtantennen für den Kurzwellenbereich. Größtenteils bezieht sich bei ihnen die Breitbandigkeit nur auf das Impedanzverhalten. Unter ihnen nimmt die Rhombusantenne einen hervorragenden Platz ein. Sie läßt sich beschreiben als Doppeldrahtleitung, die in Form eines Rhombus ausgespannt ist und am Ende mit einem Widerstand abgeschlossen ist (Abb.1). Das Strahlungsdiagramm zeigt eine starke Richtkeule in Vorwärtsrichtung unter einem Erhebungswinkel, der von den Winkeln und den in Wellenlängen gemessenen Seitenlängen des Rhombus abhängt. In der Vertikalebene ist die Halbwertsbreite der Richtkeule relativ groß. Der Erhebungswinkel für das Maximum vergrößert sich mit abnehmender Frequenz. Diese frequenzabhängige Winkeländerung ist jedoch gerade erwünscht für die an der Ionosphäre reflektierten Kurzwellen, so daß die Rhombusantenne mit festen Abmessungen über einen großen Frequenzbereich brauchbar ist.[2,3].

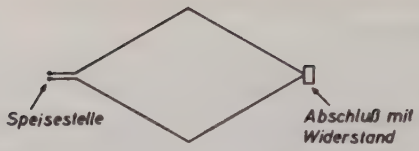

Abb.1. Die Rhombusantenne ist brauchbar für ein Frequenzverhältnis von 4:1.

Als weitere Langdrahtantennen mit Breitbandeigenschaften seien die Tannenbaumantenne (Abb.2) und die Kammantenne (Abb.3) erwähnt. Beide Antennen lassen sich bei geeigneter Wahl der Abmessungen in einem Frequenzbereich von etwa 2:1 mit recht guter Konstanz von Eingangswiderstand und Richtdiagramm verwenden.[4,5,6].

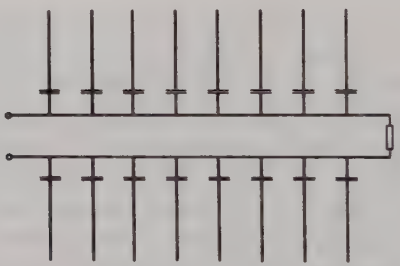

Abb.2. Die Tannenbaumantenne besitzt gute Breitbandeigenschaften für ein Frequenzverhältnis von 2:1.

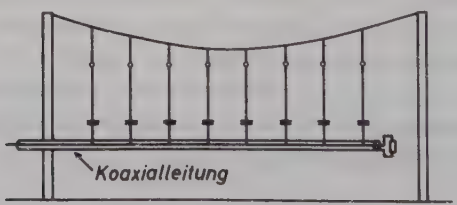

Abb.3. Die Kammantenne ist die unsymmetrische Ausführung der Tannenbaumantenne.

Anders als bei den eben beschriebenen Antennen kann man eine gewisse Breitbandigkeit auch dadurch erreichen, daß man den Wellenwiderstand der Antennenelemente verkleinert, d.h. die Querabmessungen vergrößert und dadurch die Strahlungsdämpfung erhöht [7] . Die Bedeutung großer Oberflächen für Breitbandeigenschaften ist von Schelkunoff[8,9,10] in seiner Untersuchung über die Doppelkonusantenne unterstrichen worden. Eine sehr erfolgreiche Antenne ist die Scheibenkonusantenne, die gutes Breitbandverhalten für ein Frequenzverhältnis von etwa 4:1 zeigt [11] (Abb.4).

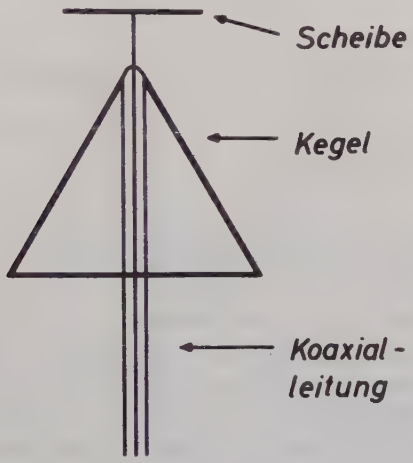

Abb.4. Scheibenkonusantenne, eine erfolgreiche Breitbandantenne.

Ebenfalls gute Breitbandeigenschaften besitzen konische Wendelantennen[12...15]. Schließlich sei noch auf die Arbeiten von Meinke[16,17] und Wahsweiler [18] über Formvariationen zur Entwicklung optimaler Breitband-Rundstrahlantennen und auf die Untersuchungen an ebenen Flächenantennen von Arlt [19] und Blume [20], ferner auf die umfassende theoretische Behandlung der Kegelantennen elliptischen Querschnitts hingewiesen [21,22].

2.2. Logarithmische Spiralantennen.

Rumsey [23] hat 1954 die Idee realisiert, daß eine Antennenstruktur, die ausschließlich durch Winkel definiert ist, also keine charakteristische Länge besitzt, in ihrer Arbeitsweise frequenzunabhängig ist. Eine derartige Struktur ist die logarithmische Spiralantenne, bei der die Begrenzung der Elemente durch logarithmische Spiralen gegeben ist (Abb.5).

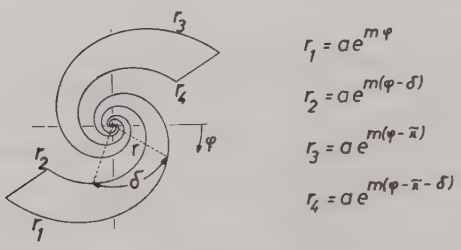

Abb.5. Zum mathematischen Bildungsgesetz der logarithmischen Spiralantenne.

Dyson hat diese Strukturen ausführlich untersucht. Da physikalische Antennen immer mindestens eine charakteristische Länge besitzen, nämlich ihre maximale Ausdehnung, arbeitet auch die logarithmische Spiralantenne nicht ganz frequenzunabhängig. Innerhalb eines Frequenzbereichs, dessen untere Grenzfrequenz von der maximalen Länge der Elemente und dessen obere Grenzfrequenz von der Feinheit der mechanischen Ausführung der Antenne am Speisepunkt bestimmt wird, sind jedoch Richtdiagramm und Eingangswiderstand nahezu konstant. Die ebene logarithmische Spiralantenne liefert eine symmetrisch zur Antennenebene verlaufende, zirkular polarisierte Strahlungscharakteristik geringer Bündelung. Dyson brachte die logarithmische Spiralantenne auf die Mantelfläche eines Kegels und erzielte damit ein einseitig gerichtetes Strahlungsdiagramm. [24,...,36].

2.3. Logarithmisch periodische Antennen.

Die ersten log-per. Antennen waren ebenso wie die logarithmischen Spiralantennen ebene Strukturen. DuHamel und Isbell [37] formulierten den grundlegenden Gedanken hierzu dahingehend, daß es auch ohne die Forderung der ausschließlichen Definition durch Winkel möglich ist, Breitbandantennen zu bauen, wenn man nur die Eigenschaften periodischer Strukturen innerhalb einer Periode nahezu konstant halten kann. Dann wird eine fast frequenzunabhängige Arbeitsweise erzielt. Die Abbildung 6 zeigt eine solche Antenne.

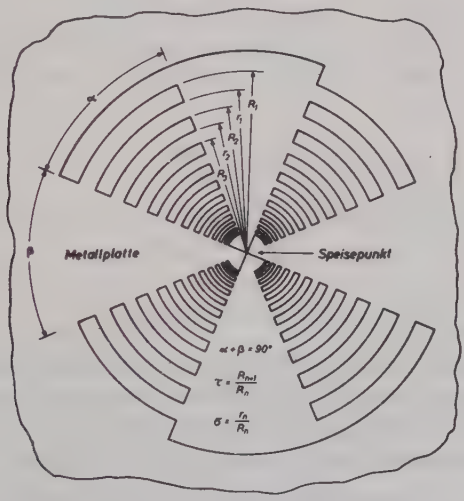

Abb.6. Ebene, selbstkomplementäre logarithmisch periodische Antenne.

Die Radien der Kreise, die die Stellung aufeinanderfolgender Zähne bestimmen, sind so gewählt, daß sie in dem für alle n konstanten Verhältnis

$$\frac{R_{n+1}}{R_n} = \tau \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{r_n}{R_n} = \sigma \qquad (1)$$

stehen.

Stellen wir uns die Struktur zunächst unbegrenzt vor, so kehren bei Erregung am Ursprung offensichtlich alle Eigenschaften der Antenne bei einer Frequenz f für alle Frequenzen $f_n = \tau^n f$ wieder. In logarithmischer Frequenzeinteilung treten diese Frequenzen periodisch mit der Periodenlänge $\log \tau$ auf.

$$\log f_n = n \log \tau + \log f \tag{2}$$

Dies erklärt die Bezeichnung "logarithmisch periodisch".

Die in Abbildung 6 gezeigte Antenne hat noch eine weitere wichtige Eigenschaft. Sie ist selbstkomplementär, d.h. die metallische Antenne hat dieselben Abmessungen wie die komplementäre Schlitzantenne. Eine einfache Überlegung mit Berücksichtigung des Babinetschen Theorems ergibt für die Impedanzen der metallischen Antenne Z_d und der Schlitzantenne Z_s die Beziehung [38,19]

$$Z_d \cdot Z_s = (60\pi)^2\ \Omega^2 \quad . \tag{3}$$

Da Schlitzantenne und metallische Antenne bei den gewählten Abmessungen identisch sind, folgt damit

$$Z_d = Z_s = 60\pi\,\Omega \approx 189\ \Omega \tag{4}$$

und zwar unabhängig von der Frequenz. Selbstkomplementäre Antennen besitzen demnach einen frequenzunabhängigen Eingangswiderstand. Eine Konstanz des Richtdiagramms läßt sich aus der Selbstkomplementarität jedoch nicht herleiten.

Es sei betont, daß das logarithmisch periodische Prinzip nur eine der Voraussetzungen für eine breitbandige Arbeitsweise der Antenne ist. Nicht jede Antenne, die nach diesem Prinzip aufgebaut ist, ist eine Breitbandantenne. Die bei der physikalischen Realisierung derartiger log-per. Antennen notwendige Beschränkung auf eine endliche Antennenlänge bringt es mit sich, daß nur eine relativ kleine Anzahl von log-per. Strukturen brauchbare Breitbandeigenschaften besitzt. Die einzelnen Elemente müssen die elektromagnetische Energie gut

abstrahlen. Andernfalls treten am Antennenende merkliche Reflexionen auf, die das Breitbandverhalten stören. Außerdem ist die Variation der charakteristischen Größen wie Richtdiagramm und Eingangswiderstand um so geringer, je näher τ bei 1 liegt, d.h. je dichter die Antenne mit Elementen belegt ist.

Die ersten Versuche mit log-per. Dipolantennen schlugen fehl. Die Richtdiagramme änderten sich stark innerhalb einer Periode. Erst als Isbell [39] im Jahre 1960 aufeinanderfolgende Dipole abwechselnd an die beiden Leiter einer homogenen Energieleitung anschloß und benachbarten Elementen so eine zusätzliche Phasendifferenz von π erteilte, ergaben sich gute Breitbandeigenschaften. Abbildung 7 zeigt den prinzipiellen Aufbau einer log-per. Dipolantenne. Für alle n gilt

$$\frac{h_{n+1}}{h_n} = \frac{l_{n+1}}{l_n} = \tau \,. \qquad (5)$$

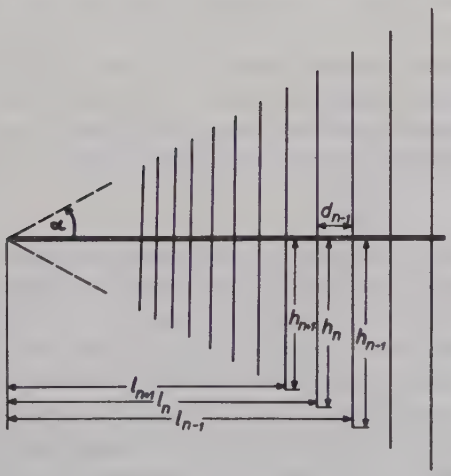

Abb.7. Logarithmisch periodische Dipolantenne.

Carrel [40] führte dann kurze Zeit später ausführliche Untersuchungen an log-per. Dipolantennen durch. Mit diesen Antennen lassen sich mühelos Bandbreiten von 20:1 überstreichen. Durch die Wahl der Parameter wie z.B. l_1, τ, α, Z_L (Wellenwiderstand der Speiseleitung) kann man die gewünschten Eigenschaften in gewissen Grenzen einstellen.[41,...,54].

2.4. Weiterentwicklungen

Obwohl man nach dem logarithmisch periodischen Prinzip Antennen bauen kann, deren Breitbandigkeit grundsätzlich nicht beschränkt ist, haben diese Antennen einen für viele Anwendungen entscheidenden Nachteil. Ihre Länge ist relativ zu dem erzielten Gewinn zu groß. Richtwerte für den Gewinn liegen bei der log-per. Dipolantenne etwa bei 8 dB bis 10 dB gegenüber dem Halbwellendipol. Die Ursache hierfür ist darin zu sehen, daß bei einer bestimmten Frequenz nur jeweils etwa 3 bis 4 Elemente strahlen, deren Länge ungefähr $\lambda/2$ beträgt. Die übrigen Elemente wirken im wesentlichen als kapazitive bzw. induktive Belastungen der Speiseleitung. Bei einer Änderung der Betriebsfrequenz verschiebt sich lediglich die Lage der strahlenden Zone. Stromverteilungsmessungen und die Ergebnisse der numerischen Auswertung der Theorie, wie sie im weiteren Verlauf der Arbeit beschrieben werden, haben dies gezeigt.

Bei einer Beurteilung der Güte log-per. Antennen durch den Ausdruck $\lambda/(q \cdot \Delta\xi)$, wobei $\Delta\xi$ die Halbwertsbreite der Richtkeule beispielsweise in der Horizontalebene, λ die Wellenlänge und q den Durchmesser der kleinsten Kugel bedeutet, die die Antenne umschließt, ergeben sich deshalb Werte, die wesentlich schlechter sind als z.B. bei Falterantennen [55]. Das Ziel weiterer Untersuchungen an diesen Antennen ist es daher, kleine logarithmisch periodische Antennen mit hohem Gewinn und großer Bandbreite zu entwickeln. Günstiger als log-per. Dipolantennen sind in dieser Beziehung log-per. Antennen,

die V-förmige Elemente besitzen. Mayes und Carrel [56] entwickelten derartige Antennen, deren längste Elemente etwa dreimal so lang waren wie die kürzesten. Die einzelnen Arme der V-Antennen schlossen einen Winkel von 45° bis 65° ein. Sie betrieben diese Antennen in den $\lambda/2$, $3\lambda/2$, $5\lambda/2$ und $7\lambda/2$ Resonanzen. Die Messungen ergaben brauchbare Breitbandeigenschaften für ein Frequenzverhältnis von 12:1 mit Ausnahme der Übergangsgebiete, in denen die Schwingungsmoden wechselten. Diese Übergangsgebiete werden mit höherer Modennummer immer breiter. Außerdem gibt es keinen universellen Winkel für die einzelnen V-förmigen Elemente, so daß gleich gute Eigenschaften in allen Resonanzen nicht möglich sind. Aus diesem Grund wurde vom Verfasser experimentell eine log-per. V-Antenne entwickelt, deren Abmessungen speziell für den $3\lambda/2$ Mode optimal gewählt wurden [57,1]. Sie kann im $\lambda/2$ und im $3\lambda/2$ Mode betrieben werden und überstreicht einen Frequenzbereich von 9:1 bei einer maximalen geometrischen Ausdehnung von etwa 1,30 m und einer unteren Grenzfrequenz von 100 MHz.

Chatterjee hat eine weitere Modifikation der log-per. Dipolantenne untersucht [58]. Statt zylindrischer Dipole werden Wendelantennen als Einzelelemente in dieser Konstruktion verwendet. Bei geeigneter Dimensionierung der Wendeln sind die Eigenschaften dieser log-per. Wendelantenne denen der korrespondierenden log-per. Dipolantenne sehr ähnlich, jedoch ist die Ausdehnung der log-per. Wendelantenne senkrecht zur Speiseleitung wesentlich geringer.[59,...,63].

3. Theorie der log-per. Dipolantenne.

Eine allgemeine Theorie für die log-per. Dipolantenne muß es gestatten, allein aus der vorgegebenen Geometrie die charakteristischen Größen wie Eingangswiderstand und Richtdiagramm zu berechnen. Verschiedene Näherungslösungen sind zu diesem Problem durchgeführt worden, so z.B. eine leitungstheoretische Näherung von Carrel, in der die Strahlungskopplung mit berücksichtigt wird [40,43] . Ebenfalls einen leitungstheoretischen Weg beschreitet die Arbeit von Schildheuer [64] . Eine von Rumsey durchgeführte Rechnung [65] gestattet lediglich ein qualitatives Verständnis der Arbeitsweise log-per. Antennen, ohne indessen für numerische Rechnungen brauchbar zu sein.

Im folgenden soll eine strenge Feldtheorie der log-per. Dipolantenne entwickelt werden. Ausgangspunkt ist eine von Zuhrt [66,67] angegebene strenge Lösung der Maxwellschen Gleichungen für die zylinderförmige Antenne. Diese Theorie kann auf eine Gruppe von Dipolantennen erweitert werden. Die Strahlungskopplung zwischen den einzelnen Elementen der Gruppe wird bei der strengen Lösung mit erfaßt. Die log-per. Dipolantenne ist aber eine spezielle Gruppenantenne und ihre Eigenschaften werden wesentlich durch die Strahlungskopplung bestimmt. Aufgrund der bei Erfüllung der Randbedingungen geforderten Rotationssymmetrie der einzelnen Antennenelemente ist diese Rechnung nur auf log-per. Dipolantennen anwendbar. Alle Fälle, bei denen zusätzliche Randbedingungen zu erfüllen sind wie z.B. bei der log-per. V-Antenne oder bei konischen Elementen, sind in dieser Theorie nicht enthalten.

Die Antenne werde als Sendeantenne betrieben. Nach dem Reziprozitätstheorem sind die Richtcharakteristiken von Sende- und Empfangsantenne gleich. Dagegen sind die Stromverteilungen verschieden. Bei der Empfangsantenne kommt zu der durch die Klemmenspannung hervorgerufenen Sendestromverteilung noch die durch das Empfangsfeld erregte Leerlauf-

stromverteilung der am Speisepunkt offenen Antenne hinzu. Da die Rechnung für die Empfangsantenne prinzipiell die gleiche wie für die Sendeantenne ist, soll nur die Sendeantenne behandelt werden.

Die Antenne bestehe aus N parallelen Dipolen aus zylindrischem Rohr. Das längste Element trage die Nummer 1, das kürzeste die Nummer N. Der Dipol der Nummer n habe die Länge $2\,h_n$, den Durchmesser $2\,\varrho_{on}$ und den Abstand l_n vom Speisepunkt der Antenne. Die Speisung der Elemente erfolgt über eine am Ende offene, symmetrische Doppelleitung mit dem Wellenwiderstand Z_l, die an der Spitze der Struktur erregt wird (Abb.8).

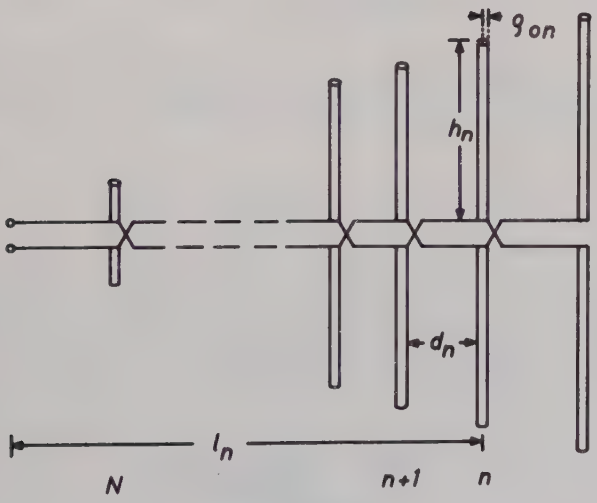

Abb.8. Zur Definition der Größen l_n, h_n, ϱ_{on}.

Zwei aufeinanderfolgende Elemente sind jeweils gegenphasig an die Leitung angeschlossen. Für sie gelten die Beziehungen

$$\frac{l_{n+1}}{l_n} = \tau \quad , \quad \frac{h_{n+1}}{h_n} = \tau \; . \tag{6}$$

Damit ist die Geometrie der Antenne festgelegt. Die aus mechanischen Gründen notwendige Verteilung der Elemente auf zwei Ebenen bleibt ebenso wie die endliche Breite der Doppelleitung unberücksichtigt. Die Schlitze an den Speisestellen der einzelnen Dipole seien also als unendlich schmal vorausgesetzt. Dies stellt nur eine unwesentliche Vernachlässigung dar. In quasistationärer Näherung ließe sich die tatsächliche Ausführung der Speisestellen sogar berücksichtigen. Wir wollen hier darauf verzichten. Die Theorie enthält noch eine weitere Voraussetzung, nämlich das Verschwinden der Ströme an den Enden der einzelnen Dipole. In Wirklichkeit greift der Strom nach innen über, so daß der Endstrom nicht genau Null ist. Er ist jedoch sehr klein und hat deshalb nur einen schwachen Einfluß. Der auftretende Fehler liegt in der Größenordnung des reziproken Schlankheitsgrads ϱ_{on}/h_n.

Die Antenne möge in der x,y-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems liegen (Abb.9). Wir betrachten zunächst das Element mit der Nummer n.

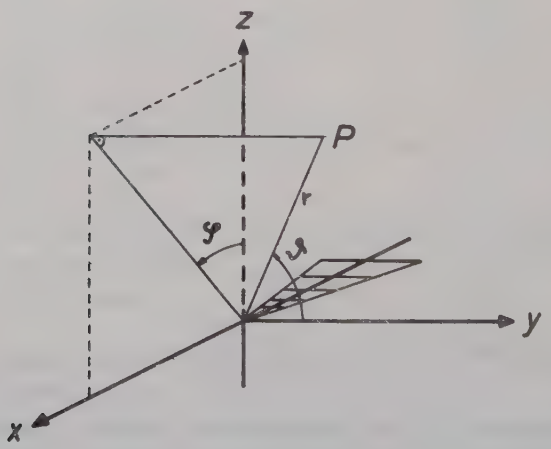

Abb.9. Lage der log-per. Dipolantenne in einem kartesischen Koordinatensystem und zugeordnete Kugelkoordinaten zur Feldberechnung:
$z = r \sin\vartheta \cos\varphi$, $x = r \sin\vartheta \sin\varphi$, $y = r \cos\vartheta$.

Für das Vakuum lauten die Maxwellschen Gleichungen für die komplexen Amplituden der Feldvektoren bei einem Zeitfaktor $e^{i\omega t}$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= i\omega\varepsilon_0 \mathbf{E} \quad , \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -i\omega\mu_0 \mathbf{H} \quad , \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0 \quad , \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad . \end{aligned} \tag{7}$$

Definiert man einen Vektor $\boldsymbol{\Pi}$, den Hertzschen Vektor, durch die Gleichungen

$$\mathbf{H} = i\omega\varepsilon_0 \operatorname{rot} \boldsymbol{\Pi} \quad \text{und} \quad \mathbf{E} = k_0^2 \boldsymbol{\Pi} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\Pi} \quad \text{mit } k_0^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad , \tag{8}$$

so folgt aus Gl.(7)

$$i\omega\varepsilon_0 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{\Pi} = i\omega\varepsilon_0 (k_0^2 \boldsymbol{\Pi} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\Pi}) \, . \tag{9}$$

Mit der Vektorumformung

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{\Pi} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\Pi} - \Delta \boldsymbol{\Pi} \tag{10}$$

folgt aus Gl.(9)

$$\Delta \boldsymbol{\Pi} + k_0^2 \boldsymbol{\Pi} = 0 \quad . \tag{11}$$

Hierin hat das Symbol Δ bei Anwendung auf eine kartesische Komponente von $\boldsymbol{\Pi}$ die Bedeutung des bekannten Δ-Operators. Bei unserer speziellen Wahl des Koordinatensystems ist nur die y-Komponente von $\boldsymbol{\Pi}$ ungleich Null. Daher hat $\boldsymbol{\Pi}$ die Darstellung

$$\boldsymbol{\Pi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Pi_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{12}$$

Da keine Möglichkeit der Verwechslung besteht, wird aus Gründen der Einfachheit und Übersichtlichkeit der Index y bei der y-Komponente des Hertzschen Vektors fortgelassen. Damit folgt aus Gl.(11)

$$\Delta \boldsymbol{\Pi} + k_0^2 \boldsymbol{\Pi} = 0 \quad . \tag{13}$$

Zur weiteren Behandlung des Problems empfiehlt sich die Einführung von Zylinderkoordinaten ρ, χ, y (Abb.10).

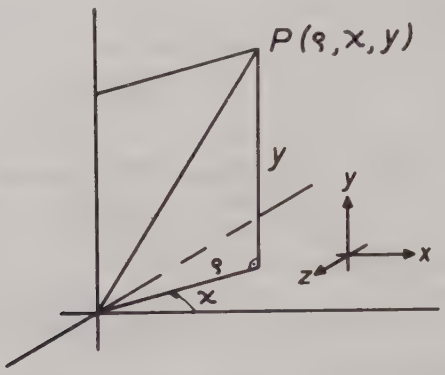

Abb.10. Zylinderkoordinatensystem ρ, χ, y.

Mit der bekannten Darstellung des Δ-Operators in Zylinderkoordinaten folgt dann aus Gl.(13) die Wellengleichung in Zylinderkoordinaten

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Pi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + k_0^2 \Pi = 0 \quad . \tag{14}$$

Macht man zur Lösung der Wellengleichung den Produktansatz

$$\Pi = \Pi_\rho(\rho) \cdot \Pi_\chi(\chi) \cdot \Pi_y(y) \quad , \tag{15}$$

so erhält man nach bekannter Rechnung durch Separation schließlich die Lösung

$$\Pi = \left[c_1 J_\nu\left(\sqrt{k_0^2 - k_y^2}\,\rho\right) + c_2 H_\nu^{(2)}\left(\sqrt{k_0^2 - k_y^2}\,\rho\right)\right] \cdot$$
$$\cdot \left[c_3 \cos \nu\chi + c_4 \sin \nu\chi\right]\left[c_5 \cos k_y y + c_6 \sin k_y y\right] . \tag{16}$$

Hierin sind ν^2, k_y^2 Separationsparameter, $c_1 \ldots c_6$ beliebige Konstanten, die aus den Randbedingungen bestimmt werden

müssen. Für die Hankelsche Funktion wird die bei der Zeitfunktion $e^{i\omega t}$ einer fortschreitenden Welle entsprechende Funktion 2.Art $H_\nu^{(2)}$ genommen.

Wegen der Rotationssymmetrie des n-ten Elements muß die χ-Abhängigkeit in Gl.(16) verschwinden, d.h. es muß $\nu=0$ gewählt werden. Die Symmetrie der Anordnung zu y=0 bedingt ferner $c_6=0$. Damit wird aus Gl.(16)

$$\Pi = \left[c_1 J_0\left(\sqrt{k_0^2-k_y^2}\,\varrho\right) + c_2 H_0^{(2)}\left(\sqrt{k_0^2-k_y^2}\,\varrho\right)\right] c_5 \cos k_y y \,. \qquad (17)$$

Der allgemeine Ansatz für den Hertzschen Vektor des n-ten Elements läßt sich nun als ein Fourierintegral über die Partikularlösungen der Wellengleichung in Zylinderkoordinaten gemäß Gl.(17) darstellen. Dabei müssen wegen der Singularitätseigenschaften der Zylinderfunktionen im Innen- und Außenraum der Antenne getrennte Lösungen angesetzt werden. Für $\varrho \to \infty$ bleiben nur die Hankelschen Funktionen endlich, sofern im Argument stets die Wurzel mit negativem Imaginärteil genommen wird. Die Besselschen Funktionen sind bei nicht verschwindendem Imaginärteil des Arguments im Unendlichen singulär. Für $\varrho \to 0$ bleiben nur die Besselschen Funktionen endlich. Um physikalisch sinnvolle Lösungen zu erhalten, werden wir daher für die y-Komponente der komplexen Amplitude des Hertzschen Vektors im Außenraum

$$\Pi_{an} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} C_n(k_y)\, H_0^{(2)}\left(\sqrt{k_0^2-k_y^2}\,\varrho_n\right) \cos k_y y \, dk_y \qquad (18)$$

und im Innenraum

$$\Pi_{in} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} D_n(k_y)\, J_0\left(\sqrt{k_0^2-k_y^2}\,\varrho_n\right) \cos k_y y \, dk_y \qquad (19)$$

ansetzen. Hierbei ist ϱ_n der Abstand des Feldaufpunkts von der n-ten Antennenachse. Strenggenommen wäre noch ein drittes Potential für den mittleren, metallischen Antennenteil anzusetzen. Dieser ist aber als unendlich schmal vorausgesetzt und erscheint nur in den Randbedingungen.

Jeder Strahler erzeugt für sich allein ein Feld, dessen Hertzscher Vektor durch Gl.(18) bzw. Gl.(19) gegeben ist. Das gesamte Strahlungspotential ist nun leicht zu berechnen. Es folgt unter Vertauschung von Summation und Integration und mit Berücksichtigung der Symmetrie zu y=0 für den Außenraum

$$\Pi_a = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sum_{n=1}^{N} C_n(k_y)\, H_o^{(2)}\left(\sqrt{k_o^2 - k_y^2}\, \varrho_n\right) \cos k_y y \, dk_y \tag{20}$$

und für den Innenraum des v-ten Elements

$$\Pi_{iv} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Big\{ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq v}}^{N} C_n(k_y)\, H_o^{(2)}\left(\sqrt{k_o^2 - k_y^2}\, \varrho_n\right) + \tag{21}$$

$$+ D_v(k_y)\, J_o\left(\sqrt{k_o^2 - k_y^2}\, \varrho_v\right) \Big\} \cos k_y y \, dk_y \,.$$

Die Konstanten $C_n(k_y)$ und $D_n(k_y)$ berechnen sich aus den Randbedingungen für die elektrische und magnetische Feldstärke.

Die durchgeführte Lösung der Wellengleichung in Zylinderkoordinaten verlangt bei Erfüllung der Randbedingungen eine Übereinstimmung der Antennenfläche mit der Koordinatenfläche $\varrho_n = \varrho_{on}$ für alle n. Dies stößt wegen der endlichen Länge der Elemente zunächst auf Schwierigkeiten. Wir können die erforderliche Übereinstimmung der Antennenfläche mit der Koordinatenfläche jedoch dadurch erzwingen, daß wir die metallische Antenne nach beiden Seiten um je zwei unendlich lange, stromlose, nicht metallische Stücke verlängern, deren Dielektrizitätskonstante mit der des Außenraums identisch ist, so daß derselbe physikalische Sachverhalt wie bisher vorliegt.

Bei symmetrischer Lage der Speisepunkte auf den Dipolantennen zu y=0 läßt sich der Strom auf dem metallischen Teil der n-ten Dipolantenne $I_n(y)$ in eine Fourierreihe entwickeln, in der wegen

$$I_n(y) = I_n(-y) \quad \text{und} \quad I_n(h_n) = 0 \tag{22}$$

nur ungerade Kosinusfunktionen auftreten, so daß gilt

$$I_n(y) = \sum_{s=1,3,5,\dots} A_{ns} \cos\left(s \frac{\pi}{2} \frac{y}{h_n}\right) . \tag{23}$$

Auf der verlängerten Antenne läßt sich der Strom durch ein Fourierintegral darstellen, das wegen der Symmetrie zu y=0 folgende Form hat:

$$I_n(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty B_n(k_y) \cos k_y y \, dk_y . \tag{24}$$

Diese beiden Entwicklungen sind zulässig, da die erforderlichen Stetigkeitsbedingungen für den Strom erfüllt sind. Durch Rücktransformation folgt aus Gl.(24)

$$B_n(k_y) = 2 \int_0^\infty I_n(y) \cos k_y y \, dy . \tag{25}$$

Da $I_n(y) = 0$ ist für $|y| \geq h_n$, ist die Integration in Gl.(25) nur bis h_n zu erstrecken. Mit Gl.(23) folgt dann unter Vertauschung von Integration und Summation

$$B_n(k_y) = 2 \sum_{s=1,3,5,\dots} A_{ns} \int_0^{h_n} \cos\left(s \frac{\pi}{2} \frac{y}{h_n}\right) \cos k_y y \, dy . \tag{26}$$

Diese Vertauschung von Integration und Summation wird im folgenden noch mehrmals vorgenommen. Sie setzt stets die gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihen und Fourierintegrale voraus. Dies Problem ist jedoch anderweitig ausführlich behandelt worden[68], so daß auf eine eingehende Diskussion der Konvergenzeigenschaften verzichtet werden kann. Hier sei lediglich festgehalten, daß unter den getroffenen Voraussetzungen über den Strom die gleichmäßige Konvergenz gesichert ist, eine Umstellung von Integration und Summation also zulässig ist.

Das Integral in Gl.(26) ist elementar lösbar. Für beliebig relle a,b gilt

$$\int \cos ax \cos bx \, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(a+b)x}{a+b} + \frac{\sin(a-b)x}{a-b}\right] .$$

Damit folgt aus Gl.(26)

$$B_n(k_y) = \frac{4h_n}{\pi} \sum_{s=1,3,5,\ldots} A_{ns} (-1)^{\frac{s-1}{2}} \frac{s}{s^2 - \left(\frac{2h_n}{\pi} k_y\right)^2} \cos k_y h_n \,. \qquad (27)$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir die Konstanten $C_n(k_y)$ und $D_n(k_y)$ in den Gl.(20) und (21) bestimmen. Dies geschieht unter der Annahme, daß der Abstand der Antennenelemente untereinander groß gegen ihren Durchmesser ist, so daß der Dipol der Nummer n am Ort des Dipols der Nummer v ein konstantes, vom Winkel χ unabhängiges Strahlungspotential erzeugt.

Die Stetigkeit der Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke auf der Oberfläche des v-ten verlängerten Antennenelements verlangt notwendig die Gleichheit der Potentiale Π_a und Π_{iv} für $\varrho_v = \varrho_{ov}$. Dies liefert mit den Gl.(20) und (21)

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \sum_{n=1}^{N} C_n(k_y)\, H_0^{(2)}\left(\sqrt{k_0^2 - k_y^2}\,\varrho_n\right) \cos k_y y \, dk_y \\ &= \int_0^\infty \left\{ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq v}}^{N} C_n(k_y)\, H_0^{(2)}\left(\sqrt{k_0^2 - k_y^2}\,\varrho_n\right) + D_v(k_y)\, J_0\left(\sqrt{k_0^2 - k_y^2}\,\varrho_{ov}\right) \right\} \cos k_y y \, dk_y \,. \end{aligned} \qquad (28)$$

Wir ordnen um und erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \Bigg\{ &\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq v}}^{N} \left[C_n(k_y)\, H_0^{(2)}\left(\sqrt{k_0^2 - k_y^2}\,\varrho_n\right) - C_n(k_y)\, H_0^{(2)}\left(\sqrt{k_0^2 - k_y^2}\,\varrho_n\right) \right] \\ &+ D_v(k_y)\, J_0\left(\sqrt{k_0^2 - k_y^2}\,\varrho_{ov}\right) - C_v(k_y)\, H_0^{(2)}\left(\sqrt{k_0^2 - k_y^2}\,\varrho_{ov}\right) \Bigg\} \cos k_y y \, dk_y = 0 \,. \end{aligned} \qquad (29)$$

Damit folgt

$$C_v(k_y)\, H_0^{(2)}\left(\sqrt{k_0^2 - k_y^2}\,\varrho_{ov}\right) = D_v(k_y)\, J_0\left(\sqrt{k_0^2 - k_y^2}\,\varrho_{ov}\right) . \qquad (30)$$

Das Durchflutungsgesetz liefert die Bedingung für die magnetische Feldstärke

$$\begin{aligned} 2\pi \varrho_{ov} \left[H_{x_{av}} - H_{x_{iv}} \right]_{\varrho_v = \varrho_{ov}} &= 2\pi \varrho_{ov}\, i\omega\varepsilon_0 \left[\frac{\partial \Pi_{iv}}{\partial \varrho_v} - \frac{\partial \Pi_a}{\partial \varrho_v} \right]_{\varrho_v = \varrho_{ov}} \\ &= I_v(y) \end{aligned} \qquad (31)$$

Mit den Gl.(20),(21) und (24) folgt unter Berücksichtigung der für alle Zylinderfunktionen Y_0 gültigen Differentialbeziehung $Y_0' = -Y_1$

$$2\pi\varrho_{ov} i\omega\varepsilon_o\Big[\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\Big\{C_v(k_y)\,H_1^{(2)}(\sqrt{k_o^2-k_y^2}\,\varrho_{ov}) - D_v(k_y)\,J_1(\sqrt{k_o^2-k_y^2}\,\varrho_{ov})\Big\}\sqrt{k_o^2-k_y^2}\,\cos k_y y\,dk_y\Big] = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty B_v(k_y)\cos k_y y\,dk_y\,, \tag{32}$$

$$C_v(k_y)\,H_1^{(2)}(\sqrt{k_o^2-k_y^2}\,\varrho_{ov}) - D_v(k_y)\,J_1(\sqrt{k_o^2-k_y^2}\,\varrho_{ov}) = \frac{B_v(k_y)}{2\pi\varrho_{ov} i\omega\varepsilon_o\sqrt{k_o^2-k_y^2}}\,. \tag{33}$$

Daraus wird mit Gl.(30) und der für beliebige komplexe Argumente w geltenden Beziehung

$$H_1^{(2)}(w)\,J_o(w) - H_o^{(2)}(w)\,J_1(w) = -\frac{2}{i\pi w}\,, \tag{34}$$

$$C_v(k_y) = -B_v(k_y)\,\frac{J_o(\sqrt{k_o^2-k_y^2}\,\varrho_{ov})}{4\,\omega\,\varepsilon_o}\,, \tag{35}$$

$$D_v(k_y) = -B_v(k_y)\,\frac{H_o^{(2)}(\sqrt{k_o^2-k_y^2}\,\varrho_{ov})}{4\,\omega\,\varepsilon_o}\,. \tag{36}$$

Die Gl.(35) und (36) gelten für alle v = 1 ... N. Damit folgt für den Hertzschen Vektor im Außenraum

$$\Pi_a = -\frac{1}{4\pi\omega\varepsilon_o}\int_0^\infty\sum_{n=1}^{N} B_n(k_y)\,J_o(\sqrt{k_o^2-k_y^2}\,\varrho_{on})\,H_o^{(2)}(\sqrt{k_o^2-k_y^2}\,\varrho_n)\cos k_y y\,dk_y \tag{37}$$

und für den Innenraum des v-ten Dipolelements

$$\Pi_{iv} = -\frac{1}{4\pi\omega\varepsilon_o}\int_0^\infty\Big\{\sum_{\substack{n=1\\ n\neq v}}^{N} B_n(k_y)\,J_o(\sqrt{k_o^2-k_y^2}\,\varrho_{on})\,H_o^{(2)}(\sqrt{k_o^2-k_y^2}\,\varrho_n) + B_v(k_y)\,H_o^{(2)}(\sqrt{k_o^2-k_y^2}\,\varrho_{ov})\,J_o(\sqrt{k_o^2-k_y^2}\,\varrho_v)\Big\}\cos k_y y\,dk_y\,. \tag{38}$$

Es bleiben noch die Spannungsbedingungen an den Speiseschlitzen und die elektrische Feldstärkenbedingung auf der wirklichen, metallischen Antenne zu erfüllen. Wir betrachten wieder das Element der Nummer v. Da auf der Antenne $\Pi_a = \Pi_{iv}$ ist, können wir uns auf das Außenfeld beschränken. Dann muß gelten

$$\left.\frac{\partial \Pi_a}{\partial y}\right|_{\varrho_v=\varrho_{ov},\,y=-0} - \left.\frac{\partial \Pi_a}{\partial y}\right|_{\varrho_v=\varrho_{ov},\,y=+0} = U_v \tag{39}$$

an der Speisestelle mit der eingeprägten Spannung U_v und

$$E_{yv} \equiv E_{y_{\varrho_v=\varrho_{ov}}} = \left[k_o^2 \Pi_a + \frac{\partial^2 \Pi_a}{\partial y^2}\right]_{\varrho_v=\varrho_{ov}} = 0 \tag{40}$$

auf dem Antennenleiter unter Vernachlässigung des Ohmschen Widerstands.

Aus Gl.(37) lassen sich diese beiden Bedingungen nicht unmittelbar erfüllen. Wir entwickeln daher zunächst die elektrische Feldstärkenkomponente E_{yv} auf der metallischen Antenne in eine Fourierreihe, die wieder nur ungerade Kosinusfunktionen enthält.

$$E_{yv}(y) = \sum_{m=1,3,5,\ldots} G_{mv} \cos\left(m \frac{\pi}{2} \frac{y}{h_v}\right) . \tag{41}$$

Die Entwicklungskoeffizienten lauten

$$G_{mv} = \frac{2}{h_v} \int_0^{h_v} E_{yv}(y) \cos\left(m \frac{\pi}{2} \frac{y}{h_v}\right) dy . \tag{42}$$

Die Spannung U_v an der Speisestelle entspricht einer eingeprägten Feldstärke

$$E_{ev} = -\frac{U_v}{2\,dl} , \tag{43}$$

wenn 2 dl die im Grenzfall gegen Null gehende Breite des Speiseschlitzes ist.

Für die Entwicklungskoeffizienten $G_{m\,v}$ folgt nun aus Gl.(42)

$$G_{mv} = -\frac{2}{h_v}\int_0^{dl} \frac{U_v}{2\,dl}\cos\left(m\frac{\pi}{2}\frac{y}{h_v}\right)dy \;, \tag{44}$$

$$G_{mv} = -\frac{U_v}{h_v}\,\frac{\sin\left(m\frac{\pi}{2}\frac{dl}{h_v}\right)}{m\frac{\pi}{2}\frac{dl}{h_v}} \;. \tag{45}$$

Für den Grenzfall dl → 0 ergibt sich daher

$$G_{mv} = -\frac{U_v}{h_v} \;. \tag{46}$$

Die Spannungsbedingung Gl.(39) ist mit den über $E_{e\,v}$ berechneten Entwicklungskoeffizienten $G_{m\,v}$ erfüllt. Um auch die Randbedingung Gl.(40) zu erfüllen, berechnen wir $E_{y\,v}$ aus

$$E_{yv} = \left[k_0^2\Pi_a + \frac{\partial^2\Pi_a}{\partial y^2}\right]_{\varrho_v=\varrho_{ov}} \tag{47}$$

und setzen dies wieder in Gl.(42) ein. Fordern wir schließlich, daß die über $E_{y\,v}$ berechneten Koeffizienten $G_{m\,v}$ mit den über $E_{e\,v}$ berechneten Koeffizienten $G_{m\,v}$ übereinstimmen, so ist auch die Randbedingung Gl.(40) erfüllt. Es ist

$$E_{yv} = -\frac{1}{4\pi\omega\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{N} B_n(k_y)\cdot(k_0^2-k_y^2)\cdot$$
$$\cdot\, J_0\left(\sqrt{k_0^2-k_y^2}\,\varrho_{on}\right) H_0^{(2)}\left(\sqrt{k_0^2-k_y^2}\,\varrho_n\right)\cos k_y y\; dk_y \;. \tag{48}$$

Hierin gilt wie auch stets in den folgenden Gleichungen

$$\varrho_n = d_{n\,v} = \text{Achsenabstand der Strahler n und v}$$
$$\text{und}\quad \varrho_v = \varrho_{o\,v} \;. \tag{49}$$

An dieser Stelle geht die Voraussetzung ein, daß der Abstand der Elemente untereinander groß gegen ihren Durchmesser ist, so daß für ϱ_n der konstante Achsenabstand $d_{n\,v}$ eingesetzt werden kann.

Setzen wir Gl.(48) in Gl.(42) ein, so folgt nach kurzer Rechnung

$$G_{m\nu} = -\frac{1}{\pi^2 \omega \varepsilon_0} \int_0^\infty \sum_{n=1}^{N} B_n(k_y)\, J_0\left(\sqrt{k_0^2-k_y^2}\,\varrho_{on}\right) H_0^{(2)}\left(\sqrt{k_0^2-k_y^2}\,\varrho_n\right) \cdot$$

$$\cdot (k_0^2-k_y^2)\, \frac{m\,(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2-\left[\frac{2h_\nu}{\pi}k_y\right]^2} \cos k_y h_\nu \, dk_y \,. \tag{50}$$

Wir setzen nun Gl.(46) mit Gl.(50) gleich unter Berücksichtigung von Gl.(27), führen zur Abkürzung ein

$$Z_{m\nu ns} = \frac{4 h_n h_\nu}{\pi^3 \omega \varepsilon_0}\, s m\, (-1)^{\frac{s+m}{2}} \int_0^\infty J_0\left(\sqrt{k_0^2-k_y^2}\,\varrho_{on}\right) \cdot$$

$$\cdot H_0^{(2)}\left(\sqrt{k_0^2-k_y^2}\,\varrho_n\right) \frac{\cos k_y h_n}{s^2-\left[\frac{2h_n}{\pi}k_y\right]^2} \; \frac{\cos k_y h_\nu}{m^2-\left[\frac{2h_\nu}{\pi}k_y\right]^2} \left(k_0^2-k_y^2\right) dk_y \tag{51}$$

und erhalten schließlich

$$\sum_{s=1,3,5,\ldots} \sum_{n=1}^{N} A_{ns}\, Z_{m\nu ns} = U_\nu \tag{52}$$

mit $m = 1,3,5,\ldots$; $\nu = 1 \ldots N$.

Die Gl.(52) stellt ein unendliches Gleichungssystem dar, aus dem die A_{ns} zu bestimmen sind. Die Koeffizienten $Z_{m\nu ns}$ haben die Dimension eines Widerstands. Sie beschreiben die Strahlungskopplung auf der Antenne und sind invariant bezüglich der Transformation ($m \to s$; $n \to \nu$), falls alle Dipole gleichen Radius ϱ_{on} haben. Die $Z_{m\nu ns}$ sind grundsätzlich bekannt. Sie lassen sich aus Gl.(51) berechnen. Allerdings ist die Integration nicht geschlossen ausführbar. Es kommen daher zur Lösung nur numerische Näherungsverfahren in Betracht. Die Inhomogenität des unendlichen Gleichungssystems, nämlich die Speisespannungen U_1 bis U_N der einzelnen Dipolelemente, sind dagegen zunächst unbekannt. Sie sind nicht willkürlich vorgebbar. Vielmehr stellen sie sich aufgrund der Speisung der Struktur und der Strahlungskopplung zwischen den einzelnen Elementen beim Betrieb der Antenne erst ein. Bekannt ist lediglich die Spannung am Anfang der Speiseleitung, d.h. an der Spitze der gesamten Struktur. Diese Spannung sei mit U_{N+1} bezeichnet. Es ist daher notwendig, die Spannungen

U_1 bis U_N als Funktion der Eingangsspannung U_{N+1} sowie der Speiseströme $I_n = I_n(y=0)$ und der geometrischen Parameter der Antenne darzustellen. Die gesuchten Funktionen lassen sich aus den Leitungsgleichungen gewinnen.

Wir wollen hierzu die Annahme machen, daß die Speiseleitung verlustfrei ist. Dann ist das komplexe Wellenfortpflanzungsmaß $\gamma_0 = \beta_0 + i\alpha_0$ rein imaginär. Die Bedeutung der im folgenden verwendeten Bezeichnungen geht aus Abb.11 hervor.

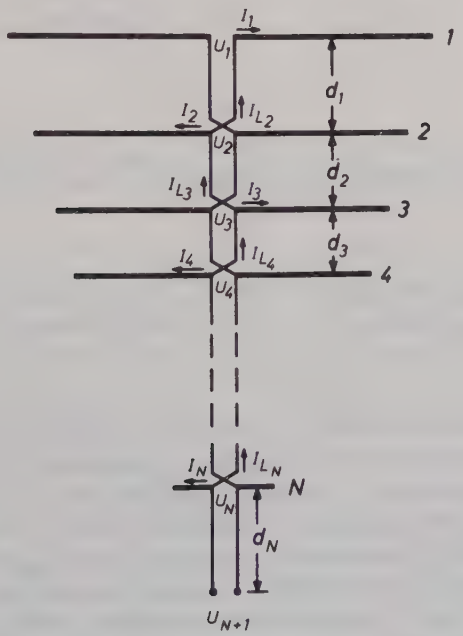

Abb.11. Zur Berechnung der Spannungen U_n aus den Leitungsgleichungen.

I_n ist identisch mit $I_n(y=0)$, so daß die Darstellung gilt

$$I_n = \sum_{s=1,3,5,\ldots} A_{ns} \quad . \tag{53}$$

Die Ströme auf der Leitung werden mit I_{Ln} bezeichnet. Da zwei aufeinanderfolgende Elemente jeweils gegenphasig an die Speiseleitung angeschlossen sind, sind die Vorzeichen von Strom und Spannung an den einzelnen Verzweigungspunkten stets umzukehren. Eine eventuell vorhandene Leitungsverlängerung jenseits des ersten Elements bleibt unberücksichtigt. Wir erhalten dann folgendes Gleichungssystem :

$$
\begin{aligned}
U_2 &= - U_1 \cos \alpha_0 d_1 - i Z_L I_1 \sin \alpha_0 d_1 \\
Z_L I_{L2} &= - i U_1 \sin \alpha_0 d_1 - Z_L I_1 \cos \alpha_0 d_1 \\
U_3 &= - U_2 \cos \alpha_0 d_2 - i Z_L (I_2 + I_{L2}) \sin \alpha_0 d_2 \\
Z_L I_{L3} &= - i U_2 \sin \alpha_0 d_2 - Z_L (I_2 + I_{L2}) \cos \alpha_0 d_2 \\
&\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
U_{n+1} &= - U_n \cos \alpha_0 d_n - i Z_L (I_n + I_{Ln}) \sin \alpha_0 d_n \\
Z_L I_{Ln+1} &= - i U_n \sin \alpha_0 d_n - Z_L (I_n + I_{Ln}) \cos \alpha_0 d_n \\
&\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
U_{N+1} &= - U_N \cos \alpha_0 d_N - i Z_L (I_N + I_{LN}) \sin \alpha_0 d_N \\
Z_L I_{LN+1} &= - i U_N \sin \alpha_0 d_N - Z_L (I_N + I_{LN}) \cos \alpha_0 d_N \quad .
\end{aligned}
\tag{54}
$$

Dieses Gleichungssystem liefert nun zunächst U_1 als Funktion der geometrischen Parameter, der Ströme I_n und der Eingangsspannung U_{N+1}. Zur Lösung des Systems kann man folgendermaßen vorgehen. Man substituiert die in der Gleichung für U_{N+1} unbekannten Größen U_N und I_{LN} mit Hilfe der vorhergehenden Gleichungen. Als neue Unbekannte tauchen U_{N-1} und I_{LN-1} auf. Indem man das Verfahren fortsetzt, gelangt man schließlich zu den beiden ersten Gleichungen des Systems, in denen kein Leitungsstrom mehr auftritt. Auf diese Weise erhält man unter Verwendung der Additionstheoreme für Sinus und Kosinus die Gleichung

$$
U_1 = (-1)^N \frac{U_{N+1}}{\cos \alpha_0 l_1} + i \frac{Z_L}{\cos \alpha_0 l_1} \sum_{j=1}^{N} (-1)^j I_j \sin \alpha_0 l_j \quad . \tag{55}
$$

Auf die Wiedergabe der Zwischenrechnungen hierzu soll verzichtet werden. Für die in Gl.(55) auftretenden Größen l_n gilt

$$l_n = d_N + d_{N-1} + \ldots + d_n \quad . \tag{56}$$

Nachdem U_1 als Funktion der I_n dargestellt ist, lassen sich nun auch die übrigen Spannungen U_n berechnen. Man hat hierzu Gl.(55) in die ersten beiden Gleichungen des Systems Gl.(54) einzusetzen und dann fortlaufend U_2 bis U_N auszurechnen. Es ergibt sich für n = 0...N die Gleichung

$$U_{n+1} = (-1)^{N+n} \frac{U_{N+1}}{\cos\alpha_0 l_1} \cos\alpha_0(d_1+\ldots+d_n) + i \frac{Z_L}{\cos\alpha_0 l_1} \cos\alpha_0(d_1+\ldots+d_n) \cdot \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+n} I_j \left[\sin\alpha_0 l_j - \frac{\sin\alpha_0(d_j+\ldots+d_n)}{\cos\alpha_0(d_1+\ldots+d_n)} \cos\alpha_0 l_1\right] . \tag{57}$$

Selbstverständlich folgt aus Gl.(57) für n=0 die Gl.(55) sowie für n=N die Identität $U_{N+1}=U_{N+1}$. Gl.(57) liefert nun den gesuchten linearen Zusammenhang zwischen den Spannungen U_n und den Strömen I_n. Der Übersichtlichkeit halber führen wir folgende Abkürzungen ein

$$K_{N+1,n+1} = (-1)^{N+n} \frac{\cos\alpha_0(d_1+\ldots+d_n)}{\cos\alpha_0 l_1} , \tag{58}$$

$$K_{N+2,n+1} = (-1)^{N-1} Z_L K_{N+1,n+1} , \tag{59}$$

$$K_{j,n+1} = \sin\alpha_0 l_j - \frac{\sin\alpha_0(d_j+\ldots+d_n)}{\cos\alpha_0(d_1+\ldots+d_n)} \cos\alpha_0 l_1 \tag{60}$$

für j = 1 ... N.
Aus Gl.(57) wird dann für n = 0 ... N

$$U_{n+1} = K_{N+1,n+1} U_{N+1} - i K_{N+2,n+1} \sum_{j=1}^{N} (-1)^j K_{j,n+1} I_j . \tag{61}$$

Setzen wir Gl.(61) in Gl.(52) ein, so folgt unter Berücksichtigung von Gl.(53)

$$K_{N+1,\nu} U_{N+1} - i K_{N+2,\nu} \sum_{j=1}^{N} (-1)^j K_{j,\nu} \sum_{s=1,3,5,\ldots} A_{js} = \sum_{s=1,3,5,\ldots} \sum_{j=1}^{N} A_{js} Z_{m\nu js} \quad . \tag{62}$$

Wir ordnen dies geeignet um, führen zur Abkürzung ein

$$W_{m\nu js} = Z_{m\nu js} + i (-1)^j K_{N+2,\nu} K_{j,\nu} \quad , \tag{63}$$

setzen die Eingangsspannung U_{N+1} gleich 1, was lediglich einer Normierung entspricht, und erhalten

$$\sum_{s=1,3,5,\ldots} \sum_{j=1}^{N} A_{js} W_{m\nu js} = K_{N+1,\nu} \tag{64}$$

für m = 1,3,5,...; ν = 1 ... N .
Infolge der angenommenen Verlustfreiheit der Speiseleitung sind die K reelle Größen. Daher gilt Re W = Re Z.

Aus dem unendlichen Gleichungssystem Gl.(64) lassen sich nun die A_{js}, die Fourierkoeffizienten der Antennenströme, bestimmen. Die Koeffizienten K sind aus den Gl.(58),(59) und (60) bekannt; die $Z_{m\nu js}$ sind aus Gl.(51) auszurechnen.

Für die weitere Auswertung von Gl.(64) wird man nun so vorgehen, daß man der Reihe nach die Gleichungen für N,2N, 3N,u.s.w. Unbekannte löst. Dies entspricht einer Näherungslösung, die von dem unendlichen Gleichungssystem jeweils nur die Glieder s=1;m=1 bzw. m=1,3;s=1,3 u.s.w. berücksichtigt. Indem man so fortlaufend Glieder mit höheren Indizes mitnimmt, also zu höheren Oberwellen der Strom- und Feldstärkenverteilung übergeht, lassen sich die unbekannten Stromkoeffizienten mit beliebiger Genauigkeit berechnen.

Sind aber die Entwicklungskoeffizienten A_{ns} bekannt, so ist das gesamte Antennenproblem gelöst. Aus Gl.(23) folgt dann sofort die Stromverteilung auf der Antenne. Gl.(53)

gibt die Eingangsströme an den einzelnen Elementen. Ebenso kann man den Eingangswiderstand der gesamten log-per. Antenne berechnen. Aus den letzten beiden Gleichungen des Systems (54) folgt

$$U_{N+1} \cos \alpha_o d_N - i Z_L I_{L,N+1} \sin \alpha_o d_N = - U_N \quad . \tag{65}$$

Hieraus folgt für den Eingangswiderstand nach der Normierung $U_{N+1}=1$

$$Z_{ein} = \frac{U_{N+1}}{I_{L,N+1}} = i \frac{Z_L \sin \alpha_o d_N}{\cos \alpha_o d_N + U_N} \quad . \tag{66}$$

Die Spannung U_N ist aus Gl.(61) bekannt. Schließlich sind durch Einsetzen der berechneten Werte von A_{ns} in Gl.(27) die $B_n(k_y)$ und damit die Hertzschen Vektoren für Innenraum und Außenraum der Antenne bekannt. Nach den Vorschriften der Gl.(8) erhält man daraus die elektrische und magnetische Feldstärke durch Differentiation. Allerdings treten dabei wiederum nicht geschlossen lösbare Integrale auf.

Nun interessiert man sich meistens jedoch für die Strahlungscharakteristiken im Fernfeld, also für die Richtdiagramme. Für diesen Fall ist das Fourierintegral für die elektrische Feldstärke

$$E_y = - \frac{1}{8\pi\omega\varepsilon_o} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{N} \left\{ \frac{4h_n}{\pi} \sum_{s=1,3,5,\dots} \left[A_{ns} \frac{s\,(-1)^{\frac{s-1}{2}}}{s^2 - \left(\frac{2h_n}{\pi} k_y\right)^2} \cos k_y h_n \right] \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (k_o^2 - k_y^2)\, J_o\!\left(\sqrt{k_o^2 - k_y^2}\, \rho_{on}\right) H_o^{(2)}\!\left(\sqrt{k_o^2 - k_y^2}\, \rho_n\right) \right\} \cos k_y y \, dk_y \tag{67}$$

relativ leicht auszuwerten. Im Fernfeld kann man folgende Näherungen machen (vgl.Abb.9)

$$\vartheta_n \approx \vartheta \quad , \quad l_n^2 \ll r^2 \quad . \tag{68}$$

Damit folgt aus $x^2+y^2+z^2 = r^2$ und $(x+l_n)^2+y^2+z^2 = r_n^2$

$$r_n = r + l_n \sin\vartheta \sin\varphi \quad , \tag{69}$$

$$o_n = r_n \sin\vartheta \quad , \tag{70}$$

$$y = r_n \cos\vartheta \quad . \tag{71}$$

$H_o^{(2)}(x)$ kann für große Argumentwerte durch seine asymptotische Näherungsformel dargestellt werden.

$$H_o^{(2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2i}{\pi x}}\, e^{-ix} \quad . \tag{72}$$

Da die Antenne bei Betrachtung aus dem Unendlichen als Punktquelle erscheint, muß die elektrische Feldstärke für diesen Fall die Form

$$E_y \sim f(\vartheta, \varphi)\, \frac{e^{-ik_o r}}{r} \tag{73}$$

annehmen. Setzen wir die Fernfeldnäherungen Gl.(70),(71) und (72) in Gl.(67) ein und benutzen wir die Schreibweise

$$\cos k_y y = \frac{1}{2}\left\{ e^{ik_y y} + e^{-ik_y y} \right\} \quad , \tag{74}$$

so folgt für die y-Komponente der elektrischen Feldstärke im Fernfeld

$$\begin{aligned} E_y = -\frac{1}{8\pi\omega\varepsilon_o} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{N} \Bigg\{ \frac{4h_n}{\pi} \sum_{s=1,3,5,\dots} \left[A_{ns}\, \frac{s\,(-1)^{\frac{s-1}{2}}}{s^2 - \left(\frac{2h_n}{\pi} k_y\right)^2} \right] \cos k_y h_n \cdot \\ \cdot (k_o^2 - k_y^2)\, J_o\!\left(\sqrt{k_o^2 - k_y^2}\, \varrho_{on}\right) \sqrt{\frac{2i}{\pi}}\, \frac{1}{\left(\sqrt{k_o^2 - k_y^2}\, r_n \sin\vartheta\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \\ \cdot e^{-i\sqrt{k_o^2 - k_y^2}\, r_n \sin\vartheta} \cdot \frac{1}{2}\left(e^{ik_y r_n \cos\vartheta} + e^{-ik_y r_n \cos\vartheta} \right) \Bigg\}\, dk_y \quad . \end{aligned} \tag{75}$$

Für $r_n \to \infty$ variieren die Faktoren

$$e^{-i\sqrt{k_o^2 - k_y^2}\, r_n \sin\vartheta} \quad \text{und} \quad e^{ik_y r_n \cos\vartheta} \quad \text{sowie} \quad e^{-ik_y r_n \cos\vartheta}$$

sehr stark im Vergleich mit den anderen Termen des Integralkerns. Die Exponentialfunktionen oszillieren sehr schnell um den Mittelwert Null und geben daher nur einen Beitrag zum Integral, wenn sie in Phase sind, da dann ihr Produkt für einige Perioden ungleich Null wird. Dies Verhalten der Integrandenfunktion läßt sich nun ausnutzen, um die Integration mit Hilfe der Methode der stationären Phase durchzuführen [69] . Sie besagt, daß für den Fall zweier

reeller Funktionen f(t) und g(t) für r → ∞ folgende Relation gilt

$$\int_a^b f(t)\, e^{irg(t)}\, dt \simeq (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{\tau\,|g''(\tau)|}}\; f(\tau)\; e^{i\tau g(\tau)} \,. \tag{76}$$

Hierbei ist τ der stationäre Punkt, d.h. $g'(\tau)=0$.
Wir wenden dies auf Gl.(75) an und führen zur Abkürzung ein

$$f(k_y) = \frac{4h_n}{\pi} \sum_{s=1,3,5,\dots} \left[A_{ns}\, \frac{s\,(-1)^{\frac{s-1}{2}}}{s^2 - \left(\frac{2h_n}{\pi} k_y\right)^2} \right] \cos k_y h_n \left(k_0^2 - k_y^2\right) \cdot$$
$$\cdot\, J_0\left(\sqrt{k_0^2 - k_y^2}\, \varrho_{on}\right) \sqrt{\frac{2i}{\pi}}\, \frac{1}{2}\, \frac{1}{\left(\sqrt{k_0^2 - k_y^2}\, \tau_n \sin\vartheta\right)^{\frac{1}{2}}} \,, \tag{77}$$

$$g_1(k_y) = -\sqrt{k_0^2 - k_y^2}\, \sin\vartheta - k_y \cos\vartheta \,, \tag{78}$$

$$g_2(k_y) = -\sqrt{k_0^2 - k_y^2}\, \sin\vartheta + k_y \cos\vartheta \,. \tag{79}$$

Damit folgt aus Gl.(75)

$$E_y = -\frac{1}{8\pi\omega\varepsilon_0} \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k_y) \left(e^{i\tau_n g_1(k_y)} + e^{i\tau_n g_2(k_y)} \right) dk_y \,. \tag{80}$$

Die stationären Punkte liegen vor für $g_1' = 0$ bzw. $g_2' = 0$.
Wir erhalten

$$\frac{dg_{1,2}(k_y)}{dk_y} = 0 = \frac{k_y}{\sqrt{k_0^2 - k_y^2}} \sin\vartheta \mp \cos\vartheta \,, \tag{81}$$

$$\frac{k_y^2}{k_0^2 - k_y^2} \sin^2\vartheta = \cos^2\vartheta \,, \tag{82}$$

$$k_y^2 \left(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta\right) = k_0^2 \cos^2\vartheta \tag{83}$$

und damit

$$k_{y_{stat_{1,2}}} = \pm k_0 \cos\vartheta \,. \tag{84}$$

Wie man sich leicht durch Einsetzen in Gl.(81) überzeugt, gilt das Pluszeichen in Gl.(84) für g_1 und das Minuszeichen für g_2. Wir benötigen $g''(k_y)$. Es gilt sowohl für g_1 als

auch für g_2

$$g''_{1,2}(k_y) = \frac{\sqrt{k_0^2 - k_y^2} + \frac{k_y^2}{\sqrt{k_0^2 - k_y^2}}}{k_0^2 - k_y^2} \sin\vartheta \quad . \tag{85}$$

Am stationären Punkt erhalten wir damit in beiden Fällen

$$g''_{1,2}(k_{y_{stat}}) = \frac{1}{k_0 \sin^2\vartheta} > 0 \quad . \tag{86}$$

g_1 und g_2 besitzen also am stationären Punkt ein relatives Minimum, und es gilt dort

$$g_1(k_{y_{stat}}) = -\left\{k_0 \sin^2\vartheta + k_0 \cos^2\vartheta\right\} = -k_0 \quad , \tag{87}$$

$$g_2(k_{y_{stat}}) = -\left\{k_0 \sin^2\vartheta + k_0 \cos^2\vartheta\right\} = -k_0 \quad . \tag{88}$$

Für E_y aus Gl.(80) folgt daher

$$\begin{aligned} E_y &= -\frac{1}{8\pi\omega\varepsilon_0} \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k_y)\left(e^{i\tau_n g_1(k_y)} + e^{i\tau_n g_2(k_y)}\right) dk_y \\ &= -\frac{1}{8\pi\omega\varepsilon_0}(1+i)\sum_{n=1}^{N} f(k_{y_{stat}})\sqrt{\frac{k_0\pi\sin^2\vartheta}{\tau_n}}\, 2\, e^{-i\tau_n k_0} \quad . \end{aligned} \tag{89}$$

Die Funktion $f(k_{y,stat})$ hat den Wert

$$\begin{aligned} f(k_{y_{stat}}) &= \frac{4h_n}{\pi} \sum_{s=1,3,5,\ldots} \left[A_{ns} \frac{s\,(-1)^{\frac{s-1}{2}}}{s^2 - \left(\frac{2h_n}{\pi} k_0 \cos\vartheta\right)^2}\right] \cos(k_0 h_n \cos\vartheta) \cdot \\ &\cdot k_0^2 \sin^2\vartheta\, J_0(k_0 \sin\vartheta\, \rho_{on}) \sqrt{\frac{2i}{\pi}}\, \frac{1}{2}\left(k_0 \sin^2\vartheta\, \tau_n\right)^{-\frac{1}{2}} \quad . \end{aligned} \tag{90}$$

Nach einfachen Umrechnungen folgt damit

$$\begin{aligned} E_{y_\infty} &= \frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon_0} k_0^2 \sin^2\vartheta \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-ik_0\tau_n}}{\tau_n} J_0(k_0 \sin\vartheta\, \rho_{on}) \cdot \\ &\cdot h_n \cos(k_0 h_n \cos\vartheta) \sum_{s=1,3,5,\ldots} A_{ns} \frac{s\,(-1)^{\frac{s-1}{2}}}{s^2 - \left(\frac{2h_n}{\pi} k_0 \cos\vartheta\right)^2} \quad . \end{aligned} \tag{91}$$

Wir berechnen noch die Kugelkomponente E_ϑ im Fernfeld. Die Transformationsgleichung lautet

$$E_y = E_r \cos\vartheta - E_\vartheta \sin\vartheta \quad . \tag{92}$$

Da im Fernfeld die E_r-Komponente verschwindet, erhält man

$$E_\vartheta = - E_y \frac{1}{\sin\vartheta} \quad . \tag{93}$$

Berücksichtigt man schließlich Gl.(69) nur in der Phase, so ergibt sich für die ϑ-Komponente der elektrischen Feldstärke im Fernfeld die Abhängigkeit

$$E_{\vartheta_{\infty}} = - \frac{k_0^2}{i\pi^2 \omega \varepsilon_0} \sin\vartheta \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \sum_{n=1}^{N} J_0(k_0 \sin\vartheta \varrho_{on}) \cdot$$

$$\cdot e^{-ik_0 l_n \sin\vartheta \sin\varphi} h_n \cos(k_0 h_n \cos\vartheta) \sum_{s=1,3,5,\ldots} A_{ns} \frac{s(-1)^{\frac{s-1}{2}}}{s^2 - \left(\frac{2h_n}{\pi} k_0 \cos\vartheta\right)^2} \quad . \tag{94}$$

Wäre man von der allgemeinen Gleichung für den Hertzschen Vektor

$$\Pi = \frac{1}{4\pi i \omega \varepsilon_0} \iiint_V J_V \frac{e^{-ik_0 r_V}}{r_V} dv \tag{95}$$

ausgegangen und hätte das Volumenintegral mit der speziell durch die entwickelte Theorie berechneten Stromverteilung ausgewertet, so wäre mit der Voraussetzung eines eindimensionalen Stroms unter Vernachlässigung der Dicke der Elemente eine zu Gl.(94) völlig analoge Gleichung herausgekommen, in der nur der Term $J_0(x)$ durch eine Konstante, nämlich den Faktor 1, ersetzt wäre. Diese Gleichung ist als Spezialfall in der noch zu entwickelnden Berechnung der Felder log-per. V-Antennen enthalten. Der einzige Unterschied zwischen beiden Arten der Fernfeldberechnung besteht darin, daß bei der soeben hergeleiteten Theorie die Dicke der Elemente berücksichtigt wird, die Berechnung also in diesem Sinne streng ist, während bei der direkten Integration

des Hertzschen Vektors die Antennenelemente als unendlich dünn angenommen werden. Der Term $J_0(x)$ in Gl.(94) beschreibt gerade den Einfluß der endlichen Elementdicke auf die elektrische Feldstärke im Fernfeld. Nun zeigt eine einfache numerische Abschätzung, daß für die in der Praxis auftretenden Argumente der Term $J_0(x)$ durchaus zu vernachlässigen ist. Die Elementdicke hat auf das Fernfeld nur geringen Einfluß. Bei der ohnehin nur schlecht abschätzbaren numerischen Genauigkeit der Rechnung erscheint es sinnvoll im Hinblick auf einen angemessenen Kompromiß zwischen Rechenzeit und Genauigkeit der Ergebnisse, auf eine Berücksichtigung der Elementdicke in der numerischen Berechnung des Fernfeldes zu verzichten. Die Elementdicke wird also nur bei der Berechnung der Stromverteilung berücksichtigt.

Die aufgenommene Leistung der Antenne berechnet sich zu

$$S = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} U_n \sum_{s=1,3,5,\dots} A^*_{ns} \quad . \tag{96}$$

Da keine Verluste auf der Antenne angenommen worden sind, ist der Realteil von S die Strahlungsleistung, der Imaginärteil die Blindleistung.

Damit sind wir in der Lage, im Rahmen einer geschlossenen, strengen Theorie alle interessierenden Antennengrößen zu bestimmen. Da nur recht schwache einschränkende Annahmen eingehen wie z.B. die Verlustfreiheit der Speiseleitung und der Elemente sowie großer Elementabstand gegenüber dem Elementdurchmesser, zeigt die numerische Auswertung der Theorie gute Übereinstimmung mit dem Experiment.[70,...,74].

4. Verfahren zur numerischen Auswertung der Theorie.

Das zentrale Problem der numerischen Auswertung der Theorie bilden die Koeffizienten Z_{mvns}. Die in ihnen auftretenden Integrationen sind nicht geschlossen ausführbar. Es bleiben daher nur numerische Näherungsmethoden zur Lösung der Integrale übrig.

Alle Rechnungen werden auf der elektronischen Rechenanlage TR4 durchgeführt. Als Programmsprachen dienen ALGOL und die Maschinensprache TEXAS. Programmtechnische Einzelheiten sollen nicht diskutiert werden. Um trotzdem einen Einblick in den Programmablauf zu gewähren, ist eine Auswahl der Programmprotokolle als Anhang der Arbeit aufgeführt.

Für ein konkretes Antennenproblem hat man das unendliche Gleichungssystem Gl.(64) zu lösen. Es sei daran erinnert, daß die beiden Fourierreihenentwicklungen für den Antennenstrom und für die elektrische Feldstärke auf der Antenne zu diesem unendlichen Gleichungssystem geführt haben. Man wird für eine praktische Auswertung der Theorie nicht das unendliche Gleichungssystem lösen, sondern sich mit einer Darstellung des Stroms und der elektrischen Feldstärke durch endliche Reihen begnügen müssen. Dann erhält man eine Folge von endlichen Gleichungssystemen, deren Lösungen Näherungen der Stromverteilung darstellen. Die Konvergenz dieser Näherungslösungen ist gesichert, wenn man keine Umordnung innerhalb des unendlichen Gleichungssystems vornimmt, wenn die Auflösung also stets nach steigender Oberwellennummer erfolgt.

In der numerischen Auswertung sind maximal die ersten fünf Glieder der Fourierreihenentwicklungen berücksichtigt worden. Nach der Anzahl der Fourierglieder werden die entsprechenden Rechnungen als erste bis fünfte Näherung bezeichnet. Die Ergebnisse werden weiter unten im einzelnen diskutiert werden. Die dritte, vierte und fünfte Näherung stimmen bereits so gut überein, daß die dritte Näherung völlig ausreichend ist und man somit einen brauchbaren

Kompromiß zwischen Rechenzeit und Rechengenauigkeit schließen kann.

Das zu lösende Gleichungssystem hat bei einer 12-Element-Antenne, wie sie als ein Untersuchungsobjekt gewählt worden ist, in der ersten und zweiten Näherung folgende Form:

1. Näherung

$$\begin{aligned}
&A_{1\,1}W_{1\,1\,1\,1}+\ldots+A_{12\,1}W_{1\,1\,12\,1}=K_{13\,1}\\
&A_{1\,1}W_{1\,2\,1\,1}+\ldots+A_{12\,1}W_{1\,2\,12\,1}=K_{13\,2}\\
&\quad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\
&A_{1\,1}W_{1\,12\,1\,1}+\ldots+A_{12\,1}W_{1\,12\,12\,1}=K_{13\,12}
\end{aligned}\tag{97}$$

2. Näherung

$$\begin{aligned}
&A_{1\,1}W_{1\,1\,1\,1}+\ldots+A_{12\,1}W_{1\,1\,12\,1}+A_{1\,3}W_{1\,1\,1\,3}+\ldots+A_{12\,3}W_{1\,1\,12\,3}=K_{13\,1}\\
&A_{1\,1}W_{1\,2\,1\,1}+\ldots+A_{12\,1}W_{1\,2\,12\,1}+A_{1\,3}W_{1\,2\,1\,3}+\ldots+A_{12\,3}W_{1\,2\,12\,3}=K_{13\,2}\\
&\quad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\
&A_{1\,1}W_{1\,12\,1\,1}+\ldots+A_{12\,1}W_{1\,12\,12\,1}+A_{1\,3}W_{1\,12\,1\,3}+\ldots+A_{12\,3}W_{1\,12\,12\,3}=K_{13\,12}\\
&A_{1\,1}W_{3\,1\,1\,1}+\ldots+A_{12\,1}W_{3\,1\,12\,1}+A_{1\,3}W_{3\,1\,1\,3}+\ldots+A_{12\,3}W_{3\,1\,12\,3}=K_{13\,1}\\
&A_{1\,1}W_{3\,2\,1\,1}+\ldots+A_{12\,1}W_{3\,2\,12\,1}+A_{1\,3}W_{3\,2\,1\,3}+\ldots+A_{12\,3}W_{3\,2\,12\,3}=K_{13\,2}\\
&\quad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\
&A_{1\,1}W_{3\,12\,1\,1}+\ldots+A_{12\,1}W_{3\,12\,12\,1}+A_{1\,3}W_{3\,12\,1\,3}+\ldots+A_{12\,3}W_{3\,12\,12\,3}=K_{13\,12}
\end{aligned}\tag{98}$$

Analoge Gleichungssysteme gelten für die höheren Näherungen. Die A_{ns} und W_{mvns} sind komplexe Größen. Führt man in den Gleichungssystemen eine Trennung nach Real- und Imaginärteil durch, so verdoppelt sich die Anzahl der Unbekannten und der Gleichungen. In der fünften Näherung ergeben sich somit bei einer Antenne mit 12 Elementen 120 Gleichungen mit 120 Unbekannten. Alle Gleichungssysteme werden nach dem Gauß-Jordan Verfahren mit Auswahl des Pivots nach dem betragsgrößten Matrixelement gelöst [75]. Dies bereitet keine Schwierigkeiten.

Alle Matrizen der Gleichungssysteme besitzen eine überwiegende Hauptdiagonale, da stets die Eigenkopplungskoeffizienten größer als die Gegenkopplungskoeffizienten sind.

Wie aus dem ALGOL-Programm im Anhang hervorgeht, ist ein erheblicher numerischer Aufwand zur Lösung der Integrale für die Strahlungskopplungskoeffizienten erforderlich. Die Schwierigkeiten treten vor allem bei den Imaginärteilen der Integrale auf. Nach Gl.(51) besitzen die Integrale folgende Gestalt

$$INT = \int_0^{\infty} J_0\left(\sqrt{k_0^2 - k_y^2}\,\varrho_{on}\right) H_0^{(2)}\left(\sqrt{k_0^2 - k_y^2}\,\varrho_n\right) \cos k_y h_n \cos k_y h_v \cdot \frac{k_0^2 - k_y^2}{\left(s^2 - \left(\frac{2h_n}{\pi} k_y\right)^2\right)\left(m^2 - \left(\frac{2h_v}{\pi} k_y\right)^2\right)}\, dk_y \tag{99}$$

mit

$$\varrho_n = \begin{cases} d_{nv} & \text{für } n \neq v \\ \varrho_{ov} & \text{für } n = v \end{cases} .$$

In den Argumenten der Zylinderfunktionen sind für $k_y < k_o$ die positiv reellen Wurzeln und für $k_y > k_o$ die negativ imaginären Wurzeln zu nehmen [67] . Das Integral zerfällt also in zwei Teile. Benutzt man im ersten Teil die Beziehung

$$H_0^{(2)}(x) = J_0(x) - i\, N_0(x) \quad , \tag{100}$$

so wird

$$INT = \int_0^{k_o} J_0\left(\sqrt{k_0^2 - k_y^2}\,\varrho_{on}\right) J_0\left(\sqrt{k_0^2 - k_y^2}\,\varrho_n\right) \frac{(k_0^2 - k_y^2)\cos k_y h_n \cos k_y h_v}{\left(s^2 - \left(\frac{2h_n}{\pi} k_y\right)^2\right)\left(m^2 - \left(\frac{2h_v}{\pi} k_y\right)^2\right)}\, dk_y$$

$$- i\left[\int_0^{k_o} J_0\left(\sqrt{k_0^2 - k_y^2}\,\varrho_{on}\right) N_0\left(\sqrt{k_0^2 - k_y^2}\,\varrho_n\right) \frac{(k_0^2 - k_y^2)\cos k_y h_n \cos k_y h_v}{\left(s^2 - \left(\frac{2h_n}{\pi} k_y\right)^2\right)\left(m^2 - \left(\frac{2h_v}{\pi} k_y\right)^2\right)}\, dk_y \right. \tag{101}$$

$$\left. + \int_{k_o}^{\infty} i\, J_0\left(-i\sqrt{k_y^2 - k_0^2}\,\varrho_{on}\right) H_0^{(2)}\left(-i\sqrt{k_y^2 - k_0^2}\,\varrho_n\right) \frac{(k_0^2 - k_y^2)\cos k_y h_n \cos k_y h_v}{\left(s^2 - \left(\frac{2h_n}{\pi} k_y\right)^2\right)\left(m^2 - \left(\frac{2h_v}{\pi} k_y\right)^2\right)}\, dk_y \right] .$$

Mit der Wurzel ist jetzt stets der positive Wert gemeint. Die beiden ersten Integrale können relativ leicht numerisch gelöst werden. Da sich die Integrationsvariable k_y nur zwischen O und k_o bewegt, kann man leicht die auf dem

Integrationsweg auftretenden maximalen Argumente abschätzen und somit die Reihenentwicklungen für J_o und N_o je nach der geforderten Genauigkeit bereits nach wenigen Gliedern abbrechen.

Grundsätzlich anders sieht es beim dritten Integral aus. Für die modifizierten Zylinderfunktionen $J_o(-ix)$ und $H_o^{(2)}(-ix)$ gelten folgende Reihenentwicklungen

$$J_o(-ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!\,n!} \quad , \tag{102}$$

$$H_o^{(2)}(-ix) = -\frac{2}{\pi} i \left\{ \ln \frac{\gamma x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!\,n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!\,n!} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \right\} . \tag{103}$$

Bricht man die Reihenentwicklungen sowohl für J_o als auch für $H_o^{(2)}$ etwa beim 45. Glied ab, so stimmen die auf diese Weise berechneten Werte für die modifizierten Zylinderfunktionen für das Argument x=10 noch auf etwa 4 Dezimalen mit den Tabellenwerten dieser Funktionen überein.[78].

Für Argumentwerte $x>10$ treten in der Darstellung der modifizierten Hankelfunktion infolge der Differenzbildung starke Rundungsfehler auf, die sich nur dadurch beheben lassen, daß man mit höherer Stellenzahl arbeitet. Dies bedeutet einerseits einen größeren Speicherbedarf, andererseits aber auch eine erhebliche Erhöhung der Rechenzeit, da die relativ schnellen arithmetischen Verknüpfungen (+,-,x,:) durch komplizierte Prozeduren ersetzt werden müssen. Im Hinblick darauf, daß trotz der Beschränkung auf Argumente $x<10$ die numerische Auswertung überzeugende Ergebnisse liefert, die sehr gut mit dem Experiment übereinstimmen, und daß auch innerhalb der verschiedenen Näherungen der Rechnung eine für praktische Erwägungen völlig ausreichende Konvergenz festgestellt werden konnte, erscheint diese Beschränkung durchaus sinnvoll.

Die Integrale Gl.(101) beschreiben die Kopplung der verschiedenen Antennenelemente aufeinander. Die Argumentbeschränkung für $H_o^{(2)}(ix)$ äußert sich in einer von den

Antennenparametern abhängigen, endlichen oberen Integrationsgrenze. Das bedeutet, daß der für eine befriedigende Genauigkeit der Rechnung zulässige Variationsbereich einiger Antennenparameter beschränkt ist. Wie man leicht einsieht, lassen sich insbesondere Antennen, deren geometrische Abmessungen groß im Vergleich zur Wellenlänge sind, mit der angegebenen numerischen Darstellung nur schlecht behandeln. Dies zeigt sich auch später bei der Diskussion des Optimierungsprogramms für log-per. Dipolantennen.

Solange die Elemente im Vergleich zur Wellenlänge dicht beieinander liegen, lassen sich die angegebenen Reihenentwicklungen für die modifizierten Zylinderfunktionen sehr gut verwenden. Liegen die betrachteten Antennenelemente sehr weit auseinander, etwa 10 bis 20 Wellenlängen, so kann man die Strahlungskopplung praktisch vernachlässigen. In dem Übergangsgebiet, das bei den meisten log-per. Dipolantennen durch den Abstand des längsten Strahlers vom kürzesten gegeben ist, kann man die Strahlungskopplung zwar noch nicht vernachlässigen, eine numerische Berechnung mit Hilfe der angegebenen Reihenentwicklung für die modifizierte Hankelfunktion ist jedoch auch nicht mehr möglich. Da man die asymptotische Näherung

$$H_0^{(2)}(-ix) \approx i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\; e^{-x} \qquad (104)$$

ebenfalls noch nicht benutzen kann, hierfür sind die in Frage kommenden Argumente eben doch noch zu klein, bleibt als Ausweg nur eine Erhöhung der Stellenzahl in der numerischen Rechnung. Dies ist allerdings mit einer wesentlichen Erhöhung der Rechenzeit verbunden.

Es tritt noch eine weitere Schwierigkeit bei der numerischen Auswertung auf. Die Funktionen

$$\cos k_y h_n \qquad \text{und} \qquad \cos k_y h_v$$

oszillieren stark innerhalb des Integrationsintervalls. Bei der numerischen Integration könnte es deshalb zu Pseudokonvergenzen kommen. Um dies zu vermeiden, werden zunächst

die Nullstellen der Integrandenfunktion bestimmt, die durch die Kosinusfunktionen verursacht werden. Indem man nun von Nullstelle zu Nullstelle integriert, werden Pseudokonvergenzen weitgehend ausgeschlossen.

Das eigentliche Integrationsverfahren benutzt die Methode von Romberg [75,77]. Obwohl dieses Verfahren sehr gut konvergiert, beanspruchen die Integrationen die meiste Zeit innerhalb des rechnenden Programms. Die Integrandenfunktionen werden wegen der großen Zahl der Stützstellen im Integrationsintervall viele tausend mal berechnet. Um hier Rechenzeit zu sparen, wurden die Reihenentwicklungen für die Zylinderfunktionen in der Maschinensprache TEXAS programmiert.

Damit sind die wesentlichen Probleme, die bei der numerischen Auswertung der Theorie aufgetreten sind und die zu einer numerischen Instabilität der Rechnung für bestimmte Parametersätze führen können, besprochen worden. Gleichzeitig sind damit die Grenzen abgesteckt, innerhalb derer das ALGOL-Programm im Anhang sinnvoll angewendet werden kann. [79,80].

5. Aufbau der Meßeinrichtungen.

5.1. Stromverteilungsmessungen.

Eine kleine induktive Sonde mißt die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke an den Fußpunkten der einzelnen Antennenelemente. Sie ist etwa 8 mm lang. Da nur das Magnetfeld der Ströme auf den Elementen und nicht zusätzlich das Magnetfeld der Ströme auf der Speiseleitung gemessen werden soll, liefert die Messung nur dann vernünftige Ergebnisse, wenn die beiden Magnetfelder orthogonal sind. Dies ist z.B. bei der log-per. Dipolantenne der Fall.

Amplituden und Phasen werden getrennt gemessen. Die Abbildung 12 zeigt das Blockschaltbild der Meßanordnung zur Amplitudenmessung, Abbildung 13 dasjenige zur Phasenmessung.

Abb.12. Blockschaltbild zur Amplitudenmessung.

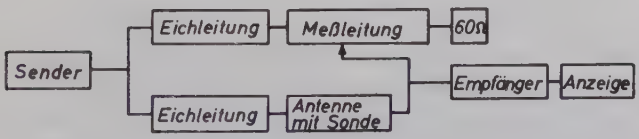

Abb.13. Blockschaltbild zur Phasenmessung.

Die Amplitudenmessung bereitet keine grundsätzlichen Schwierigkeiten. Anders ist es bei der Phasenmessung. Die in der Sonde induzierte Spannung wird mit einer über die Meßleitung erzeugten Vergleichsspannung zur Interferenz gebracht und auf den Empfängereingang geschaltet. Die Meßleitung wird nun so abgeglichen, daß die Registrierspannung am Empfängerausgang minimal wird. Führt man dies

für zwei aufeinanderfolgende Elemente durch, so erhält man zwei verschiedene Abgriffstellungen der Meßleitung. Ihre Differenz liefert sofort die gesuchte Phasendifferenz. Es gilt für die Phasendifferenz der beiden Ströme $\delta = 2\pi x/\lambda$, wenn x die Differenz der Abgriffstellungen der Meßleitung ist.

Die Genauigkeit dieses Meßverfahrens ist nicht sehr groß, da die Sonde die Stromverteilung ziemlich stark stört. Außerdem ist für eine sinnvolle Phasenmessung Voraussetzung, daß Sondenspannung und Vergleichsspannung ungefähr gleich groß sind. Andernfalls sind die Interferenzminima sehr breit und daher nicht exakt bestimmbar. Eine leichte Verbesserung ergab sich, wenn man amplitudenmodulierte Signale verwendete und dann am Empfängerausgang das Minimum der NF-Spannung aufsuchte. Um nahezu gleiche Amplituden zu gewährleisten, schaltet man zweckmäßig regulierbare Dämpfungsglieder, sogenannte Eichleitungen, hinzu. Sie bewirken gleichzeitig eine Entkopplung der beiden Kanäle und halten so Rückwirkungen der Antenne auf die Meßleitung und umgekehrt vernachlässigbar niedrig. Leider bewirken sie jedoch eine Phasendrehung, die dämpfungsabhängig ist. Bei jeder neuen Dämpfungseinstellung muß somit eine neue Phaseneichung vorgenommen werden.

Nun liegen bei log-per. Dipolantennen die Stromamplituden nicht alle in derselben Größenordnung. Das Verhältnis von maximaler zu minimaler Stromamplitude kann 40 dB übersteigen. Damit sich scharfe Interferenzminima einstellen, muß die Dämpfung also während einer Meßreihe häufig neu eingeregelt werden. Hierbei wird dann auch jedesmal eine neue Phaseneichung notwendig. Dies alles setzt die Meßgenauigkeit der Anordnung erheblich herab, da eventuelle Meßfehler sich in allen weiteren Eichungen und Messungen fortpflanzen.

5.2. Messungen der Richtdiagramme.

Es werden stets die relativen Empfangscharakteristiken gemessen. Nach dem Reziprozitätstheorem sind diese mit den Sendecharakteristiken identisch. Das Blockschaltbild der Meßanordnung zeigt Abbildung 14.

Abb.14. Blockschaltbild der Anordnung zur Messung von Richtdiagrammen.

Ein Elektromotor dreht über ein Getriebe, verschiedene Wellen und Kegelräder einen Stahlmast mit der zu messenden Antenne um seine Längsachse. Abbildung 15 gibt einen Eindruck vom äußeren mechanischen Aufbau.

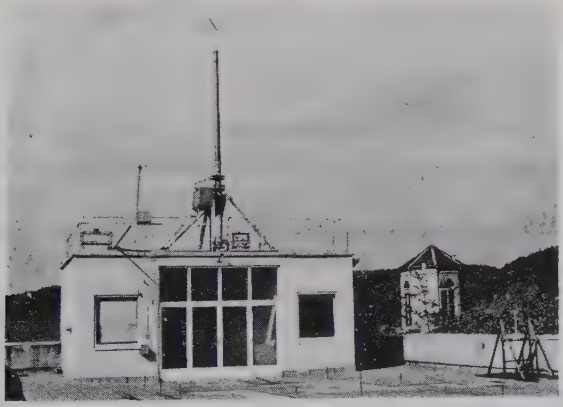

Abb.15. Ansicht des äußeren mechanischen Aufbaus zur Messung von Richtdiagrammen.

Synchron mit dem Stahlmast läuft der mechanische Teil eines Polarkoordinaten-Pegelschreibers.

Zur Speisung der Antennen wird der geringen Abmessungen wegen ein 50 Ohm Präzisionskabel verwendet. Die Ableitung vom Mast erfolgt über ein 50 Ohm/60 Ohm Transformationsglied und ein 60 Ohm Koaxialkabel. Die für die verschiedenen Frequenzbereiche jeweils angeschlossenen Empfänger liefern eine linear von der Empfängereingangsspannung abhängige Gleichspannung. Diese Registrierspannung wird dem linearen Pegelschreiber über einen Gleichspannungsverstärker mit einstellbarer Nullinie zugeführt und in Polarkoordinaten aufgezeichnet.

Als Sendeantenne dient oberhalb von 300 MHz eine Lemniskatengruppenantenne mit 16 Elementen, unterhalb von 300 MHz eine Falterantenne, beide mit Reflektorwand. Die Entfernung zwischen Sendeantenne und Empfangsantenne beträgt ca. 100 m.

In den gemessenen Richtdiagrammen treten deutliche Unsymmetrien auf, die teils von mechanischen Mängeln der Antennen herrühren, teils aber auch durch störende Einflüsse des Geländes hervorgerufen werden.

5.3. Impedanzmessungen.

Die Impedanzmessungen werden mit Hilfe zweier sogenannter Z-g-Diagraphen durchgeführt. Diese Geräte gestatten es, die Leitungstransformation durch das Speisekabel mit einem gleichlangen Hilfskabel zu kompensieren und damit durch Messung des komplexen Reflexionsfaktors unmittelbar die Speisepunktsimpedanzen an der Antennenspitze im Smith-Diagramm darzustellen. Die Meßgenauigkeit dieser Geräte liegt bei etwa 3%. Einige Schwierigkeiten macht das exakte Abgleichen der Kabel. Dies liegt vor allem daran, daß aufgrund der unsymmetrischen Speisung der Antennen der Übergang vom koaxialen Speisekabel zur Bandleitung keinen definierten Wellenwiderstand besitzt und deshalb nicht exakt zu kompensieren ist. Eine leichte Verschiebung der gemessenen Widerstandsortskurven in den kapazitiven oder induktiven Bereich ist daher vor allem bei

hohen Frequenzen möglich. Für alle Messungen beträgt der Wellenwiderstand des Speisekabels 60 Ohm. Abbildung 16 zeigt das Blockschaltbild der Anordnung zur Impedanzmessung.

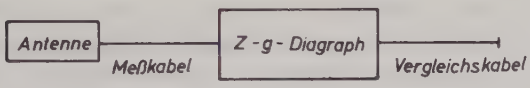

Abb.16. Blockschaltbild der Anordnung zur Impedanzmessung.

6. Ergebnisse der Rechnungen und Messungen.

6.1. Wahl der Parameter und mechanische Konstruktion der Antenne.

Die Theorie wird zunächst für einen speziellen Satz von Parametern numerisch ausgewertet. Damit überhaupt Breitbandeigenschaften ermöglicht werden, müssen log-per. Strukturen langsam veränderlich sein, d.h. τ muß Werte nahe bei 1 annehmen. Für die untersuchte Antenne wird $\tau = 0{,}9$ gewählt. Die übrigen Parameter lauten :

Anzahl der Dipole	N	=	12	,
Öffnungswinkel	α	=	29°	,
maximale Länge	l_1	=	1375 mm	,
maximale Elementlänge	h_1	=	750 mm	,
Wellenwiderstand der Speiseleitung	Z_L	=	52 Ohm	,
Radius der Strahler	ϱ_{on}	=	4 mm	.

Definieren wir eine Größe σ als den in Wellenlängen gemessenen Abstand eines $\lambda/2$ langen Dipols von seinem nächst kleineren Nachbarn, so gilt wegen

$$h_n = \lambda/4 \quad , \; l_{n+1} / l_n = \tau \quad \text{und} \quad l_n / h_n = \cot\alpha$$

die Beziehung

$$\sigma = \frac{1-\tau}{4} \cot\alpha \qquad . \qquad (105)$$

Die Größe σ ist ein wichtiger Parameter. Er beschreibt, wie wir später sehen werden, die Phasenlage benachbarter Elemente in der "Strahlungszone" der Antenne. Aus den oben gewählten Werten für τ und α folgt $\sigma \approx 0{,}05$. Damit wird ein guter Kompromiß zwischen maximaler Antennenlänge und Richtwirkung erzielt. Abbildung 17 zeigt ein Foto dieser Antenne.

Als Speiseleitung wird eine Bandleitung benutzt. Die Leiter bestehen aus Messingvierkantstäben mit dem Querschnitt 8mm x 18mm. Die Isolatorschicht ist aus Plexiglas. Die Länge der Leitung beträgt 1400 mm. In der Rechnung wird stets mit $\varepsilon = 1$ für das Dielektrikum der Speiseleitung gerechnet, um innerhalb der Rechnung möglichst übersichtliche Verhältnisse

zu schaffen. Die Phasenkonstante entlang der Speiseleitung α_o ist dann nämlich gleich k_o. Trotz dieser unterschiedlichen Parameter bei gemessenen und berechneten Antennen ist die Übereinstimmung zwischen Experiment und Rechnung sehr gut. Eine genauere Untersuchung über die Abhängigkeit des Gewinns vom Dielektrikum der Speiseleitung wird für die optimale log-per. Dipolantenne durchgeführt werden (vgl.8). Es zeigt sich, daß der Gewinn im Bereich von $\varepsilon = 1$ bis $\varepsilon = 2{,}6$ nur um maximal 10% variiert.

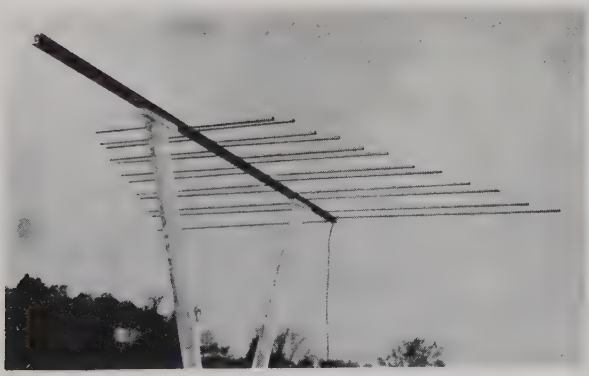

Abb.17. Untersuchte log-per. Dipolantenne.

6.2. Antenneneingangsströme entlang der Speiseleitung.

Die Abbildung 18 zeigt die gemessenen Antenneneingangsströme nach Betrag und Phase entlang der Speiseleitung bei einer Frequenz von 150 MHz. Hierfür ist das Element mit der Nummer 5 etwa $\lambda/2$ lang. Es liegt ein ausgeprägtes Maximum der Stromamplitude für diejenigen Elemente vor, deren Länge ungefähr $\lambda/2$ beträgt. Dort ändert sich die Phase von Element zu Element jeweils um etwa $\pi/2$. Die Rechnungen geben diesen Verlauf gut wieder. Die Abbildungen 19 und 20 zeigen die berechneten Stromverteilungen in 5.Näherung. Ein ausgeprägtes

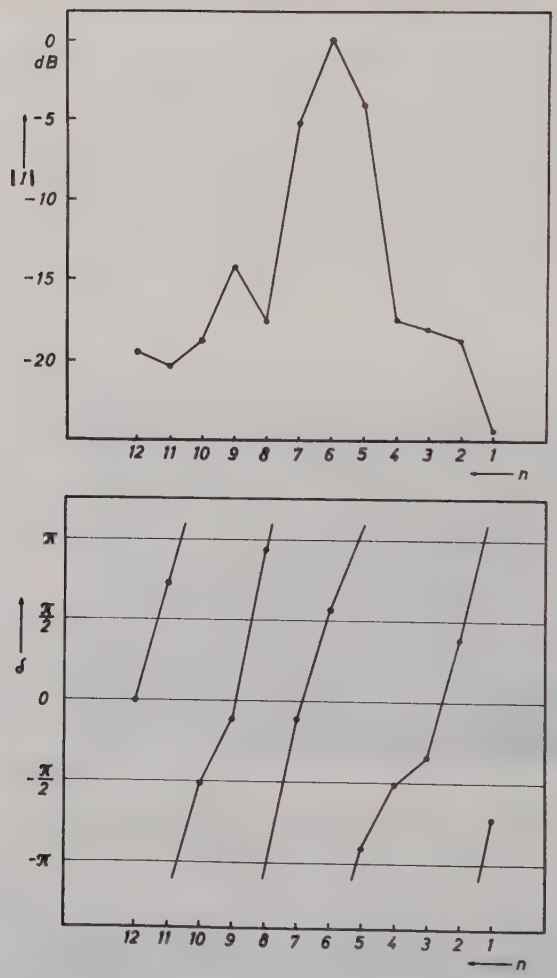

Abb. 18. Gemessene Stromverteilung für die log-per. Dipolantenne mit den Parametern: τ=0, N=12, Z_L=52 Ω, h_1 = 750 mm, l_1 = 1375 mm, ϱ_{eh} = 4 mm bei 150 MHz, Stromamplitude |I| und Stromphase δ an den Fusspunkten der Antennenelemente in Abhängigkeit von der Elementnummer n.

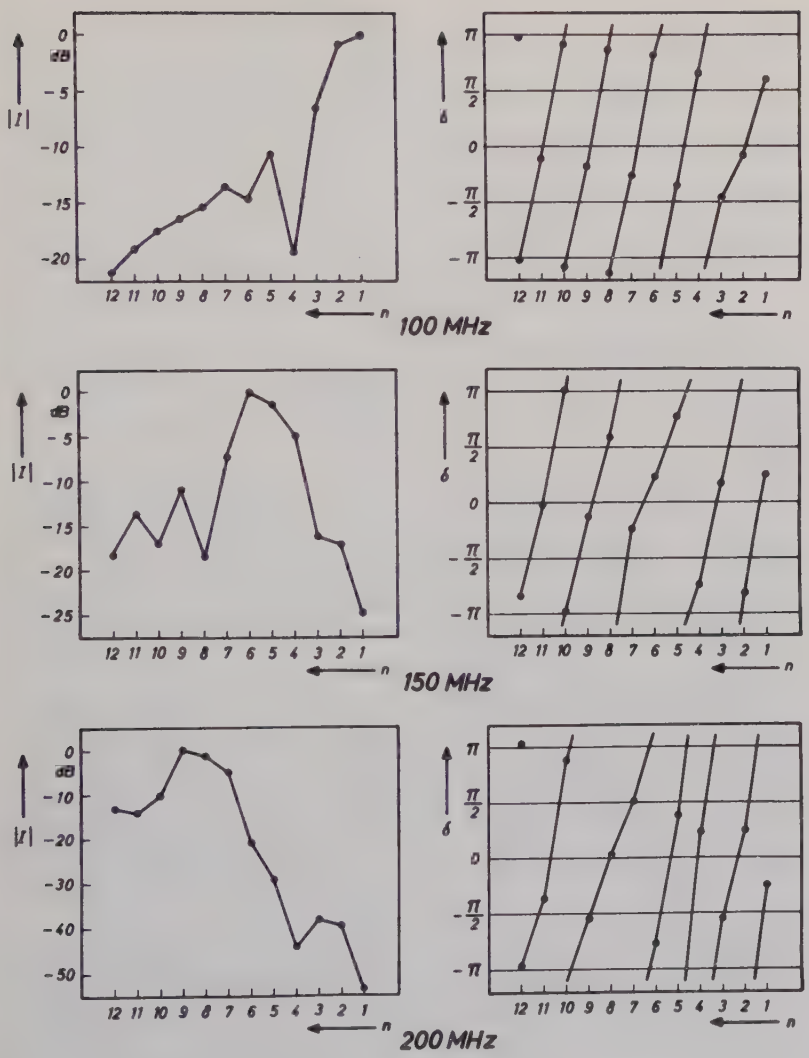

Abb. 19. Berechnete Stromverteilung (5. Näherung) für die log-per. Dipolantenne bei 100 MHz, 150 MHz und 200 MHz. Stromamplitude |I| und Stromphase δ an den Fusspunkten der Antennenelemente in Abhängigkeit von der Elementnummer n. Parameter: τ=0, 9, N=12, Z_L=52Ω, h_1 = 750 mm, l_1 = 1375 mm, ϱ_{on} = 4 mm.

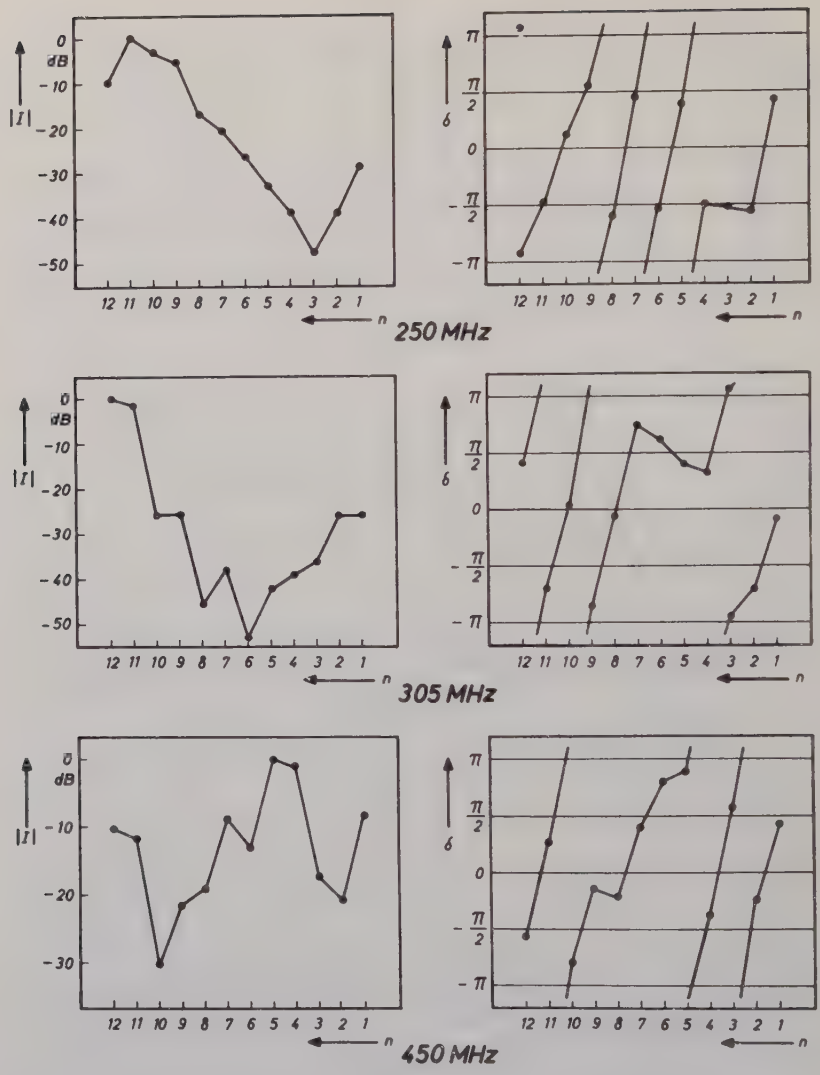

Abb. 20. Berechnete Stromverteilung (5. Näherung) für die log-per. Dipolantenne bei 250 MHz, 305 MHz und 450 MHz. Stromamplitude $|I|$ und Stromphase δ an den Fusspunkten der Antennenelemente in Abhängigkeit von der Elementnummer n. Parameter: τ=0, 9, N=12, Z_L=52Ω, h_1 = 750 mm, l_1 = 1375 mm, ϑ_{ers} = 4 mm.

Maximum der Stromamplituden, die "aktive Zone", liegt bei den Elementen, die etwa $\lambda/2$ lang sind, und erstreckt sich auf 3 bis 4 Elemente. Die übrigen Stromamplituden sind gegenüber dem Maximum stark gedämpft, teilweise über 40 dB. Die Phasendifferenzen benachbarter Elemente zeigen einen ebenso charakteristischen Verlauf. Ausgehend von der Speisestelle der Antenne, also vom kürzesten Element, liegen sie zunächst bei etwa π. Im Bereich der aktiven Zone verringern sie sich auf $\pi/2$, während sie jenseits der aktiven Zone wieder nahezu π bzw. 2π betragen. Bei einer Änderung der Betriebsfrequenz verschiebt sich die Lage der aktiven Zone lediglich auf der Antenne. Der charakteristische Verlauf von Stromamplitude und Stromphase bleibt dagegen erhalten.

Dies Verhalten bedeutet für die an der Spitze der Antenne erregten Wellen praktisch die Existenz dreier Zonen auf der Antenne. Die erste Zone wird fast ohne Dämpfung durchlaufen und bewirkt nur eine Änderung der Phasenlage. In der aktiven Zone tritt wegen der Abstrahlung eine starke Dämpfung ein. Dahinter, in der dritten Zone, laufen dann nahezu ungedämpft nur noch Wellen mit sehr viel kleinerer Amplitude, bis sie am Ende der Antenne reflektiert werden. Dieser weiterlaufende Teil ist eine Ursache dafür, daß bei der notwendigen endlichen Antennenlänge das Verhalten derartiger log-per.Antennen selbst in dem jeweils für sie speziell gewählten Frequenzbereich nicht vollständig konstant ist. Ein weiterer Grund ist die Tatsache, daß die Antenne nicht kontinuierlich mit Elementen zu besetzen ist.

In den Abbildungen 19 und 20 ist jeweils die 5.Näherung der Rechnung eingezeichnet. Die Unterschiede zu den ersten vier Näherungen sind sehr gering. Sie liegen teilweise sogar unter der Zeichengenauigkeit. Die Konvergenz der Rechnung wird im folgenden Abschnitt untersucht.

6.3. Konvergenz der numerischen Auswertung.

Aufgrund der Darstellung der Ströme und Feldstärken in Fourierreihen ist es klar, daß die näherungsweise durchgeführte Lösung des unendlichen Gleichungssystems konvergieren muß (vgl.4.). Die Konvergenzgeschwindigkeit kann jedoch in Abhängigkeit von den Antennenparametern sehr unterschiedlich sein. Hierzu betrachten wir folgendes Beispiel.

Befindet sich ein Element genau in der $\lambda/2$ Resonanz, so wird die Stromverteilung auf ihm mit sehr guter Näherung bereits durch den ersten Term der Fourierentwicklung

$$I_n(y) = A_{n1} \cos\left(1 \frac{\pi}{2} \frac{y}{h_n}\right) \tag{106}$$

wiedergegeben. Analoges gilt natürlich für die elektrische Feldstärke auf dem Antennenelement. Sofern der Antennenstab nur hinreichend dünn ist, der Schlankheitsgrad also sehr hoch ist, wird der Anteil an Oberwellen zu dieser Stromverteilung vernachlässigbar gering sein. Bei einem Element, das sich in der $3\lambda/2$ Resonanz befindet, kann man eine derartig einfache Näherung für den Strom wie oben nicht mehr durchführen. Hier ist ganz wesentlich der nächst höhere Term

$$A_{n3} \cos\left(3 \frac{\pi}{2} \frac{y}{h_n}\right)$$

an der Stromverteilung beteiligt. Bei noch höheren Resonanzen müssen immer mehr Glieder der Fourierreihen für die Stromverteilung und die elektrische Feldstärke auf der Antenne berücksichtigt werden. Dementsprechend wird beispielsweise bei fest vorgegebener Geometrie der Antenne die Konvergenzgeschwindigkeit der numerischen Auswertung von der Betriebsfrequenz abhängen. Solange sich die aktive Zone,"das Phasenzentrum", nahezu am unteren Ende, dem langwelligen Ende der Antenne, befindet, wird man bereits mit den beiden ersten Näherungen allein sehr gute Ergebnisse erzielen, d.h. die numerische Auswertung konvergiert sehr schnell. Bei höheren Frequenzen, wenn einzelne Elemente $3\lambda/2$ oder sogar $5\lambda/2$ lang sind, werden höhere Glieder der Fourierreihe zur hinreichend genauen Beschreibung der Stromverteilung notwendig. Demzu-

folge konvergiert die numerische Auswertung dann auch langsamer. Dies sieht man zum Beispiel aus den Darstellungen der Stromamplituden auf den einzelnen Antennenelementen in 1. bis 5. Näherung oder auch aus den Richtdiagrammen bei verschiedenen Frequenzen in 1. bis 5. Näherung.

Besonders empfindlich gegenüber Änderungen der Stromverteilung ist bekanntlich der Eingangswiderstand. Um die Güte der numerischen Rechnung anhand der Konvergenz der Näherungen beurteilen zu können, zeigt die Abbildung 21 die Real- und Imaginärteile der Eingangswiderstände bei verschiedenen Frequenzen innerhalb des Arbeitsbereichs der Antenne in den ersten fünf Näherungen. Es ergibt sich, daß die Abweichungen zwischen dritter, vierter und fünfter Näherung in dem interessierenden Frequenzbereich so gering sind, daß man dort durchaus die dritte Näherung als ausreichend bezeichnen kann.

Die Konvergenz der numerischen Rechnung ist so gut, daß man für praktische Erwägungen mit einem erträglichen Aufwand an Rechenzeit auskommt. Eine völlige Übereinstimmung von Rechnung und Experiment ist ohnehin nicht zu erwarten, weil die Geometrie der Speiseleitung, das Dielektrikum der Speiseleitung, sowie die aus mechanischen Gründen notwendige Verteilung der Elemente auf zwei Ebenen in der Rechnung nicht berücksichtigt worden sind.

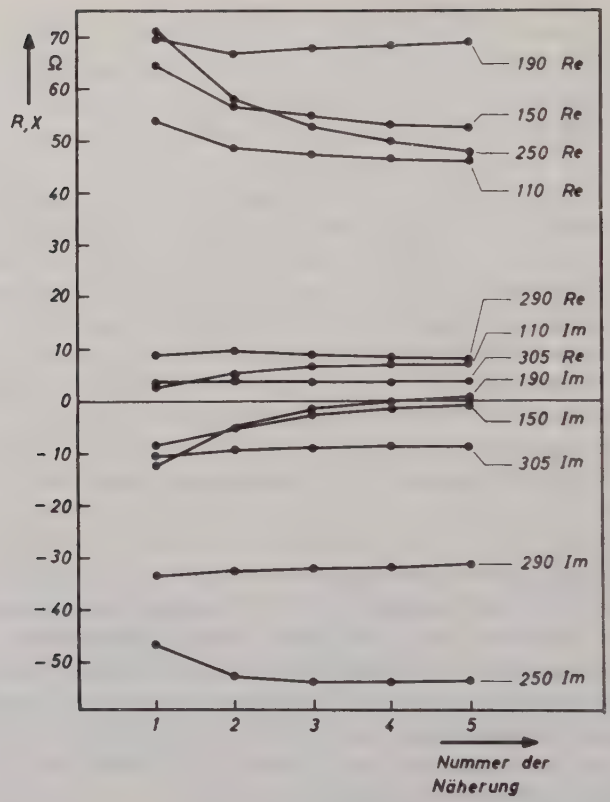

Abb.21. Berechnete Eingangswiderstände einer log-per. Dipolantenne in 1. bis 5.Näherung. Realteil R und Imaginärteil X des Eingangswiderstands für verschiedene Frequenzen. Frequenzangaben in MHz.

6.4. Stromverteilung auf den einzelnen Antennenelementen.

Es soll nun die Stromverteilung auf den einzelnen Antennenelementen bei verschiedenen Frequenzen berechnet werden. Die Konvergenz der Rechnung ist bereits anhand der Eingangswiderstände der log-per. Dipolantenne untersucht worden, so daß wir hier auf eine erneute Diskussion der Konvergenzeigen-

schaften verzichten wollen.

Allen Berechnungen der Stromverteilung liegt die fünfte Näherung zugrunde, d.h. die Ströme werden dargestellt durch

$$I_n(y) = \sum_{s=1,3,5,7,9} A_{ns} \cos\left(s \frac{\pi}{2} \frac{y}{h_n} \right) \quad . \qquad (107)$$

Die Antenne ist gebaut für einen Frequenzbereich von 100 MHz bis etwa 300 MHz. Als Beispiel für den Frequenzbereich, der unterhalb der unteren Grenzfrequenz der Antenne liegt, ist 80 MHz gewählt. Die Abbildung 22 zeigt die berechneten Stromverteilungen für alle zwölf Elemente bei 80 MHz, 200 MHz, 290 MHz und 450 MHz. Abgebildet ist jeweils nur die Stromamplitude auf einer Antennenhälfte, da der Strom symmetrisch zu y=0 ist. Das Maximum der Stromamplitude auf jedem Element ist auf 1 normiert; als Abszisse ist y/h_n aufgetragen.

Es zeigt sich, daß die Stromamplitude auf den längsten Elementen bei 80 MHz wie $\cos(\frac{\pi}{2} \frac{y}{h_n})$ abfällt. Auf den kürzesten Elementen fällt die Stromamplitude nahezu linear ab. Dies entspricht durchaus den Vorstellungen, die man sich von der Stromverteilung aufgrund leitungstheoretischer Überlegungen ohne Berücksichtigung der Strahlungskopplung macht. Erhöht man die Betriebsfrequenz, so tritt in diesem charakteristischen Verlauf der Stromamplituden erst dann eine qualitative Änderung ein, wenn die längsten Elemente länger als λ werden, also etwa bei 200 MHz. Hier wird man erwarten, daß die Theorie eine von dem leitungstheoretischen, ohne Berücksichtigung der Dicke der Elemente und der Strahlungskopplung berechneten Stromverlauf deutlich verschiedene Stromverteilung liefert. Die Abbildung 22 bestätigt das. Die Stromamplitude auf dem in λ-Resonanz befindlichen Element 1 unterscheidet sich merklich von einer Sinusfunktion. Insbesondere liegt im Speisepunkt y=0 keine Nullstelle der Stromamplitude vor. Zu kürzeren Elementen hin geht die Stromverteilung langsam in den nahezu sinusförmigen Verlauf auf Element 7 über. Dieses ist ungefähr $\lambda/2$ lang.

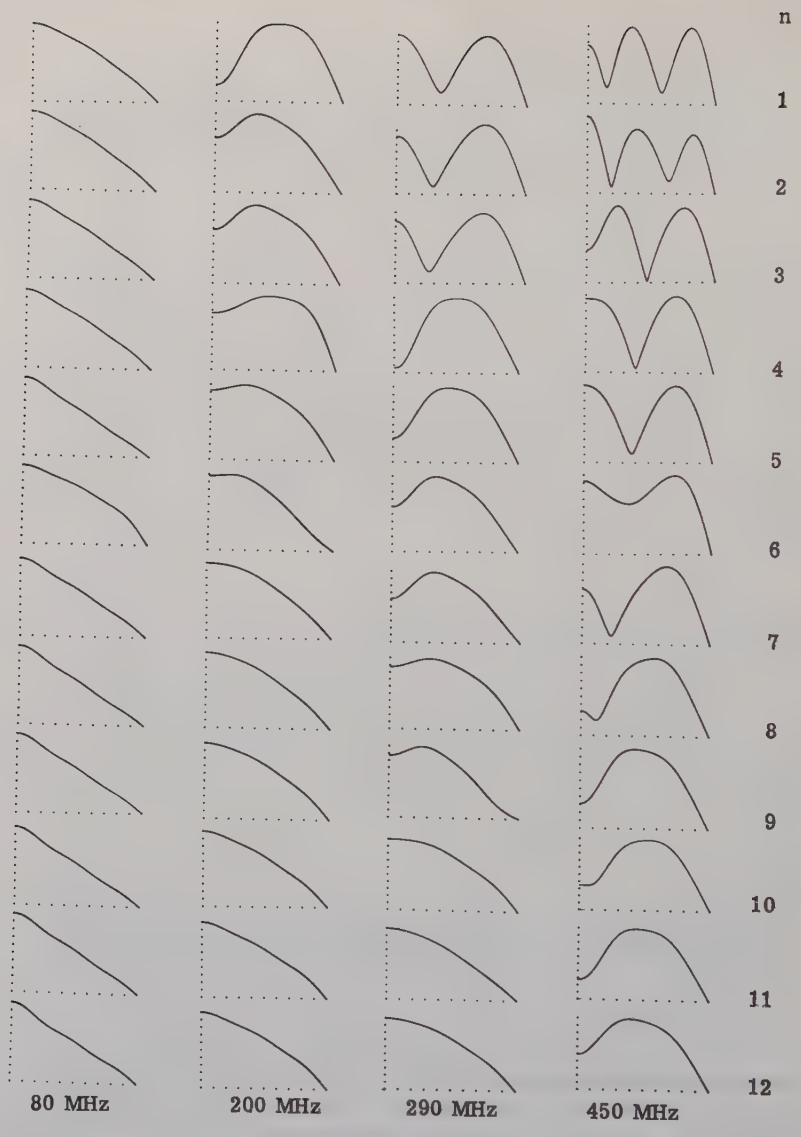

Abb. 22. Berechnete Stromverteilung (5. Näherung) auf den Elementen der log-per. Dipolantenne mit den Parametern: $\tau = 0,9$, $N = 12$, $Z_L = 52\,\Omega$, $h_1 = 750$ mm, $l_1 = 1375$ mm, $\varrho_{on} = 4$ mm. Als Abszisse ist jeweils aufgetragen y/h_n, als Ordinate $|I_n(y)| / |I_n|_{max}$.

In der Nähe der oberen Grenzfrequenz der Antenne, also etwa bei 29o MHz, ist Element 1 ungefähr 3λ/2 lang. Dementsprechend sieht auch die berechnete Stromverteilung aus. Auch hier ziehen wiederum die Minima der Stromamplituden nicht auf Null ein. Die 3λ/2 und der Übergang zur λ/2 Resonanz sind wieder gut zu erkennen.

Als letztes Beispiel wird die Betriebsfrequenz 450 MHz gewählt. Die längsten Elemente schwingen bereits fast im 5λ/2 Mode. Das Element 3 ist etwa 2λ, Element 5 etwa 3λ/2 und Element 9 nahezu λ lang. Auch dies wird von der berechneten Stromverteilung gut wiedergegeben. Diese zuletzt berechnete Stromverteilung wird später benutzt werden, um die Richtdiagramme der analogen log-per. V-Antenne zu berechnen (vgl.9.).

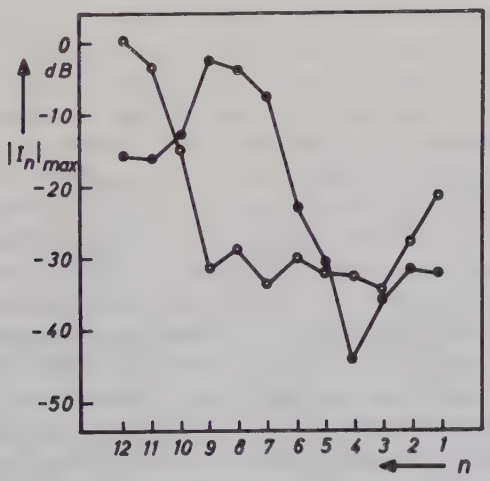

Abb.23. Maximale Stromamplitude $|I_n|_{max}$ in Abhängigkeit von der Elementnummer n für 200 MHz (●) und 290 MHz (o) .

Die Abbildung 23 zeigt der Vollständigkeit halber für zwei Frequenzen die Strommaxima auf den Antennenelementen in Abhängigkeit von der Elementnummer n. Man sieht, daß die

Antenne vorzugsweise in der $\lambda/2$ Resonanz schwingt. Der λ-Schwingungstyp ist wegen seiner hohen Impedanz nur sehr schwach angeregt.

6.5. Richtdiagramme.

Die Rechnung ergibt bezüglich der Richtdiagramme ein Breitbandverhalten der Antenne von etwa 100 MHz bis 300 MHz. Innerhalb dieses Frequenzbereichs ist die Strahlungscharakteristik der Antenne nahezu konstant. Die Meßergebnisse für einige repräsentative Frequenzen zeigt Abbildung 24. Die Abbildung 25 gibt die berechneten Richtdiagramme in fünfter Näherung wieder. Rechnung und Messung stimmen gut überein. Bei 80 MHz, also unterhalb der unteren Grenzfrequenz der Antenne, ist die Strahlungscharakteristik noch fast die einer $\lambda/2$ langen Linearantenne. Es tritt nur eine geringfügige Bündelung in Vorwärtsrichtung auf. Da bei 80 MHz alle Elemente kleiner sind als $\lambda/2$, liefert bereits die erste Näherung der Rechnung sehr gute Ergebnisse. Die höheren Terme der Fourierreihen wirken sich nur als kleine Modifizierungen des Grundterms aus. Demzufolge sind die berechneten Richtdiagramme in allen fünf Näherungen fast identisch. Für die Frequenz 90 MHz gilt dasselbe. Nur ist hier die Richtwirkung im Vergleich zu 80 MHz schon etwas größer geworden. Bei 100 MHz beginnt der eigentliche Breitbandbereich der Antenne. Die untere Grenzfrequenz ist erreicht. Das längste Element befindet sich in der $\lambda/2$-Resonanz. Es führt den meisten Strom. Etwa ab 110 MHz läßt sich hinter der aktiven Zone zu längeren Elementen hin ein Abfall der Stromamplitude beobachten (vgl.6.2.). Dies bedeutet, daß der Bereich breitbandiger Arbeitsweise der Antenne erreicht ist. Von nun an ändern sich die Richtdiagramme mit der Frequenz nur noch wenig.

Etwa ab 190 MHz reicht zur Berechnung der Stromverteilung der Grundterm der Fourierreihe nicht mehr aus (vgl.6.3.). Dementsprechend ändern sich die Richtdiagramme mit höherer Näherung etwas. Besonders ausgeprägt ist dies bei 290 MHz und 305 MHz, der oberen Grenzfrequenz der Antenne. Dort sind

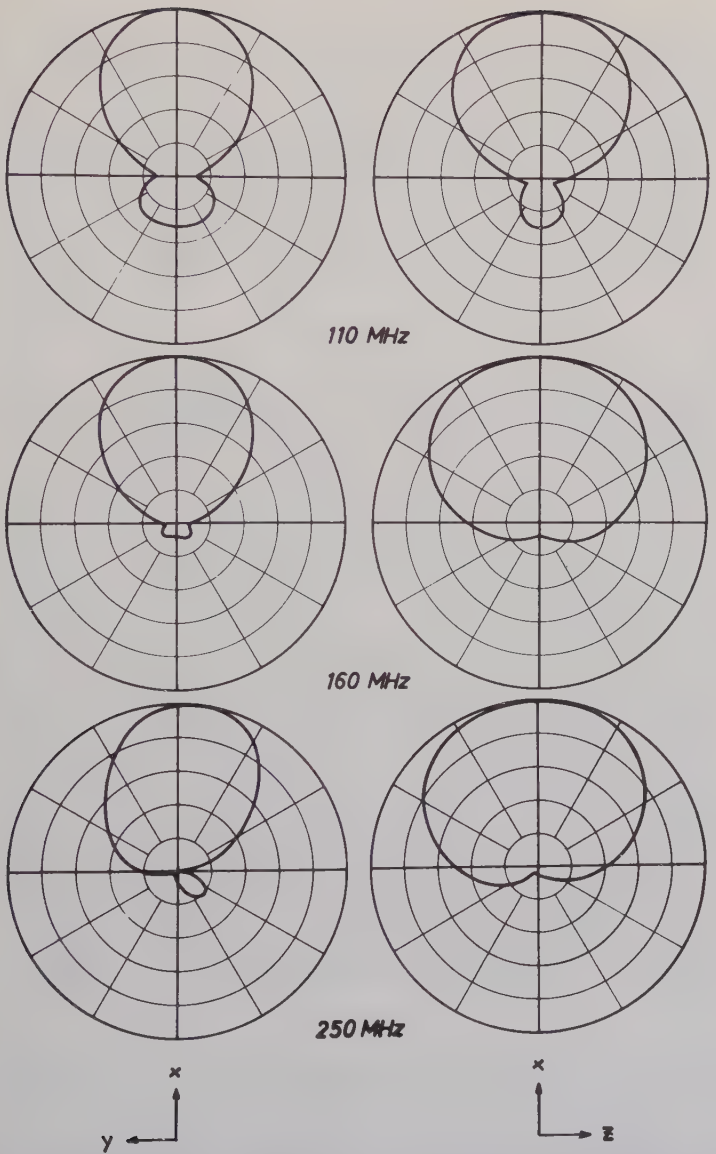

Abb. 24. Gemessene Richtdiagramme der log-per. Dipolantenne für 110 MHz, 160 MHz und 250 MHz. Antennenparameter: $\tau = 0,9$, N=12, $Z_L = 52\,\Omega$, $h_1 = 750$ mm, $l_1 = 1375$ mm, $\varrho_{on} = 4$ mm.

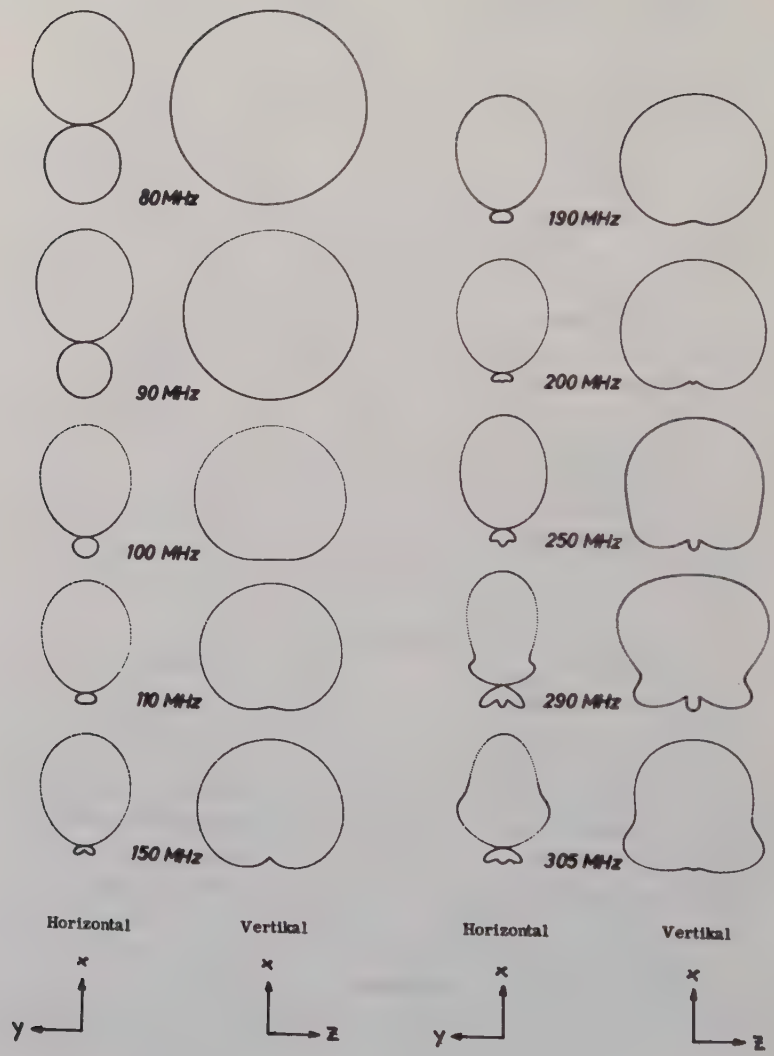

Abb. 25. Berechnete Richtdiagramme (5. Näherung) für die log-per. Dipolantenne mit den Parametern: $\tau = 0,9$, N=12, $Z_L = 52\,\Omega$, $h_1 = 750$ mm, $l_1 = 1375$ mm, $\varrho_{eh} = 4$ mm.

die längsten Elemente in der $3\lambda/2$ Resonanz erregt. Zur genauen Berechnung der Stromverteilung ist hier also der Term $\cos(3\frac{\pi}{2}\frac{y}{h_n})$ entscheidend. Daher ist die zweite Näherung von der ersten Näherung deutlich verschieden. Die folgenden Näherungen bewirken dann wiederum nur geringfügige Korrekturen. Oberhalb von 305 MHz ist die Antenne nicht mehr brauchbar. Die Richtdiagramme fächern auf. Als Beispiel ist 450 MHz gewählt worden. Die Abbildung 26 zeigt die berechneten Richtdiagramme hierfür in erster bis fünfter Näherung.

Wir betrachten die einzelnen Resonanzen auf der Antenne. Bei 450 MHz existiert der $\lambda/2$-Mode auf der Antenne nicht mehr. Die gewählte Geometrie verbietet das. Vorherrschend ist die $3\lambda/2$-Resonanz (vgl.Abb.20). Die $5\lambda/2$-Resonanz beginnt sich gerade bei den längsten Elementen auszubilden. Die geradzahligen Schwingungstypen sind zwar auch vorhanden, wegen ihrer hohen Impedanz aber praktisch nur sehr schwach angeregt. Auch die $5\lambda/2$-Resonanz ist gegenüber der $3\lambda/2$-Resonanz bereits stark gedämpft, da der größte Teil der Energie in der $3\lambda/2$-Resonanz abgestrahlt wird. Demzufolge gestattet die erste Näherung der Rechnung keine vernünftige Beschreibung der tatsächlichen Verhältnisse. Die 2. Näherung, die den Term $\cos(3\frac{\pi}{2}\frac{y}{h_n})$ der Fourierentwicklung enthält, zeigt schon ungefähr die Strahlungscharakteristik, die man unter Berücksichtigung des Gruppendiagramms der Antenne aufgrund der Einzelcharakteristik des $3\lambda/2$ langen gestreckten Dipols erwartet. Die 3. Näherung ist zwar von der zweiten noch merklich verschieden, die qualitativen Eigenschaften der Richtdiagramme sind jedoch unverändert geblieben. Die 4. und 5. Näherung schließlich nehmen nur noch kleine Korrekturen vor.

Diese Ergebnisse zeigen unter anderem, daß man vor Beginn einer numerischen Auswertung der Theorie aus dem gewünschten Betriebszustand der Antenne die Nummer der Näherung bestimmen kann, in der die Fourierkoeffizienten der Stromverteilung berechnet werden müssen, um zu sinnvollen Ergebnissen zu gelangen. Bei der hier untersuchten Antenne, die einen Frequenzbereich von 3:1 überstreicht, wird man stets mit der

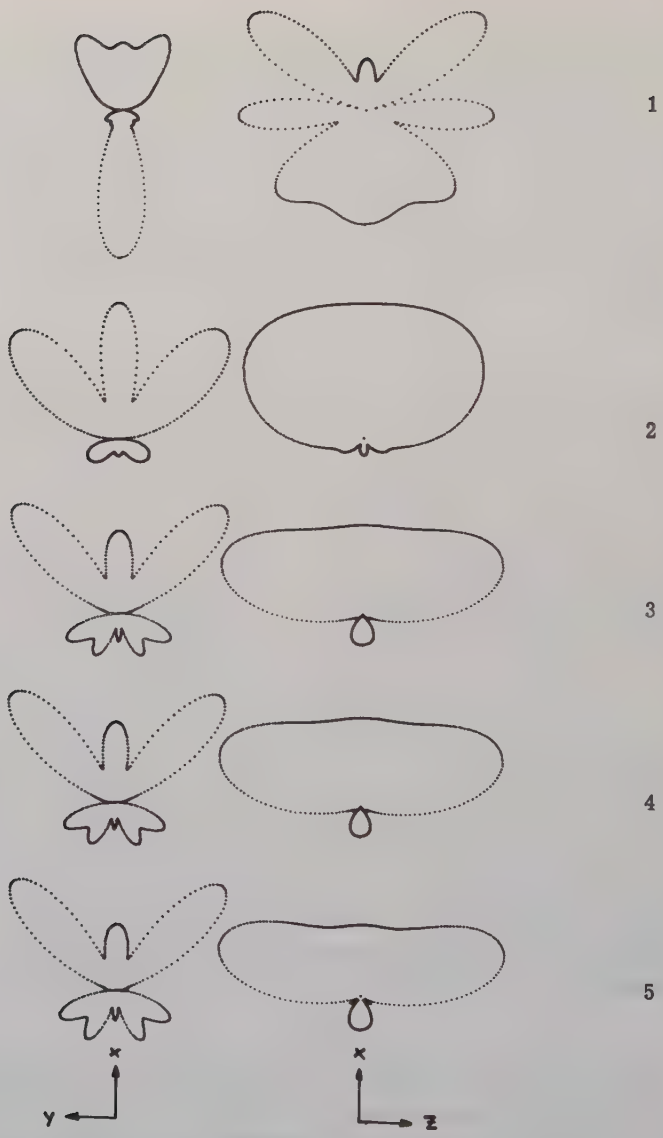

Abb. 26. Berechnete Richtdiagramme in 1. bis 5. Näherung bei 450 MHz für die log-per. Dipolantenne mit den Parametern: $\tau = 0,9$, N=12, $Z_L = 52\,\Omega$, $h_1 = 750$ mm, $l_1 = 1375$ mm, $\vartheta_{ch} = 4$ mm.

dritten Näherung in dem hauptsächlich interessierenden, breitbandigen Arbeitsgebiet der Antenne auskommen. Anders liegen die Verhältnisse natürlich bei Antennen, die einen Frequenzbereich von 10:1 oder noch mehr überstreichen. Will man hier die Eigenschaften der Antenne etwa im oberen Drittel des Bereichs berechnen, so sind eventuell höhere Näherungen notwendig, die sich jedoch analog zu den oben durchgeführten Überlegungen leicht bestimmen lassen.

6.6. Eingangswiderstände.

Die Abbildung 27 zeigt die berechneten Eingangswiderstände in 5.Näherung. Das Impedanzverhalten dieser Antenne ist danach nicht unbedingt als breitbandig anzusprechen. Ähnlich schlecht verläuft die gemessene Widerstandsortskurve. Dies liegt hauptsächlich an der Wahl der relativ niedrigen Werte für Z_1 und δ . Das Optimierungsprogramm (vgl.7.und 8.) macht dies deutlich. Eine Änderung des Wellenwiderstands der Speiseleitung beeinflußt vor allem das Impedanzverhalten der Antenne. Die Richtdiagramme bleiben nahezu konstant. Das läßt sich aus grundsätzlichen Überlegungen zu den Nahfeld- und Fernfeldgrößen ohne weiteres verstehen, denn alle anderen Parameter der Antenne, vor allem die Elementlängen und die Elementabstände, sind unverändert geblieben. Es ist lediglich die Kopplung der Strahler über die Speiseleitung geändert worden.

Die Eingangswiderstände bei verschiedenen Frequenzen sind für mehrere Wellenwiderstände Z_1 berechnet worden. Für $Z_1=100\,\Omega$ sind die Ergebnisse in Abbildung 27 mit eingezeichnet. Das Impedanzverhalten wird im Bereich von 110 MHz bis 260 MHz besser, wenn der Wellenwiderstand der Speiseleitung größer als $52\,\Omega$ gewählt wird. Eine weitere Erhöhung über $Z_1=100\,\Omega$ hinaus ist jedoch nicht zweckmäßig, da sich dann die Hauptkeule der Strahlungscharakteristik langsam verbreitert. Man wird daher als einen guten Kompromiß zwischen Impedanzbreitbandigkeit und möglichst kleiner Halbwertsbreite der Richtdiagramme $Z_1 = 100\,\Omega$ wählen.

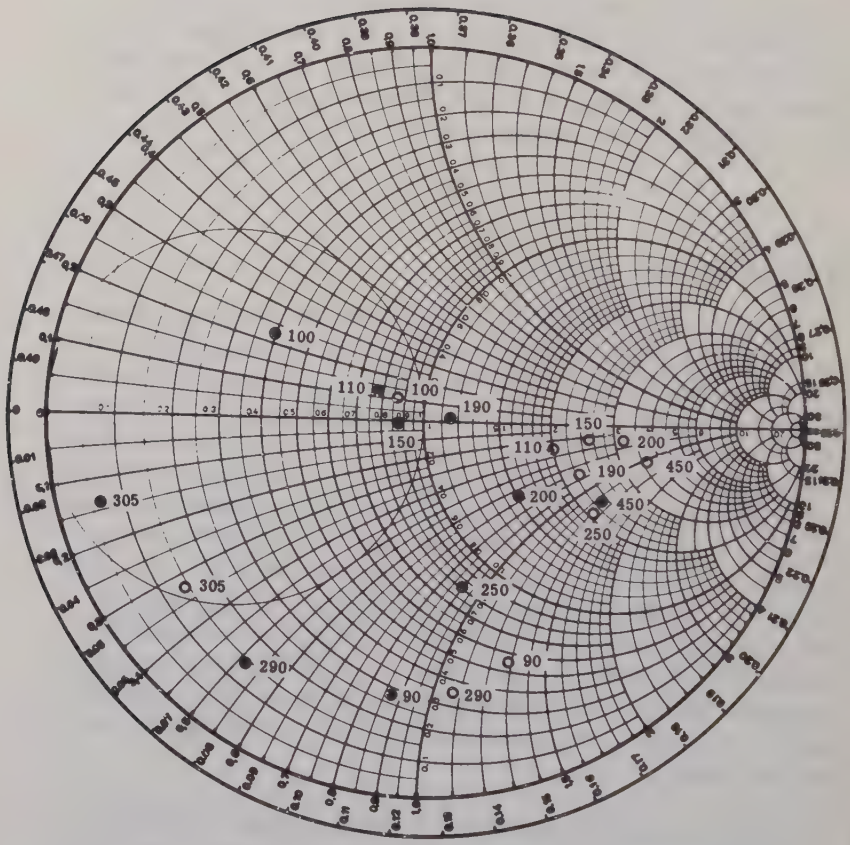

Abb. 27. Berechnete Eingangswiderstände (5. Näherung) für die log-per. Dipolantenne mit den Parametern: $\tau = 0,9$, N=12, $Z_L = 52\,\Omega$ (●) bzw. $Z_L = 100\,\Omega$ (o), $h_A = 750$ mm, $l_A = 1375$ mm, $\varrho_{eA} = 4$ mm. Frequenzangaben in MHz. Die Mitte des Smith-Diagramms entspricht 60 Ω .

7. Optimierung bezüglich des Gewinns.

Es gibt viele Möglichkeiten einer Optimierung log-per. Antennen, da die Anzahl der zu variierenden Parameter bei ihnen recht beträchtlich ist. Das im vorigen Abschnitt untersuchte Problem der Widerstandsanpassung der Speiseleitung an die einzelnen Dipole ist eine mögliche Optimierungsaufgabe. Die hier nun speziell durchgeführte numerische Optimierung soll den Öffnungswinkel α der Antenne oder, was damit gleichbedeutend ist, die Größe σ derart bestimmen, daß für eine mittlere Frequenz im Arbeitsbereich der Antenne die Strahlungscharakteristik eine möglichst geringe Halbwertsbreite und ein möglichst hohes Vorrückverhältnis aufweist. Dazu wird folgender Weg beschritten.

Die Speiseleitung und die Größen l_n, d.h. die Speisestellen der einzelnen Elemente auf der Speiseleitung bleiben unverändert. Variiert wird α und damit $\sigma = (1-\tau)\ 0{,}25\ \cot\alpha$. Wegen $\operatorname{tg}\alpha = h_n/l_n$ ändern sich bei konstanten l_n gleichzeitig mit α die Größen h_n. Das bedeutet, daß sich auch der Breitbandbereich der Antenne verschiebt. Die Betriebsfrequenz kann nun beispielsweise derart gewählt werden, daß sich die aktive Zone stets etwa in der Mitte der Antennenstruktur befindet. Man erhält auf diese Weise vergleichbare Betriebszustände der Antenne. Da sich die Wellenlänge λ mit α ändert, variiert bei konstanten $d_n = l_n - l_{n+1}$ die Größe d_n/λ und verschiebt so die Phasenlage benachbarter Antennenelemente. Man wird also erwarten, daß sich durch Variation von σ eine optimale Phasenlage in der Strahlungszone und damit eine optimale Gruppencharakteristik der Struktur finden läßt, die es gestattet, eine log-per. Dipolantenne mit besonders gut bündelnder Richtcharakteristik zu konstruieren. Die Dicke der einzelnen Elemente innerhalb dieser Optimierung bleibt konstant. Der Schlankheitsgrad variiert daher. Für das Fernfeld der Antenne ist dies jedoch bedeutungslos. Die numerische Rechnung wird stets in der dritten Näherung durchgeführt, da diese einen guten Kompromiß zwischen Rechenzeit und Rechengenauigkeit darstellt.

7.1. Optimierung für N=3.

Zunächst wird eine Antenne mit drei Elementen untersucht. τ nimmt die Werte 0,8 , 0,85 und 0,9 an. Abbildung 28 zeigt den aus den Halbwertsbreiten der Vertikal- und Horizontaldiagramme nach der Gleichung

$$G = \text{konst.} / (\varphi_h \cdot \varphi_v) \qquad (108)$$

näherungsweise berechneten Gewinn sowie das Vorrückverhältnis in Abhängigkeit von δ bei verschiedenen τ.

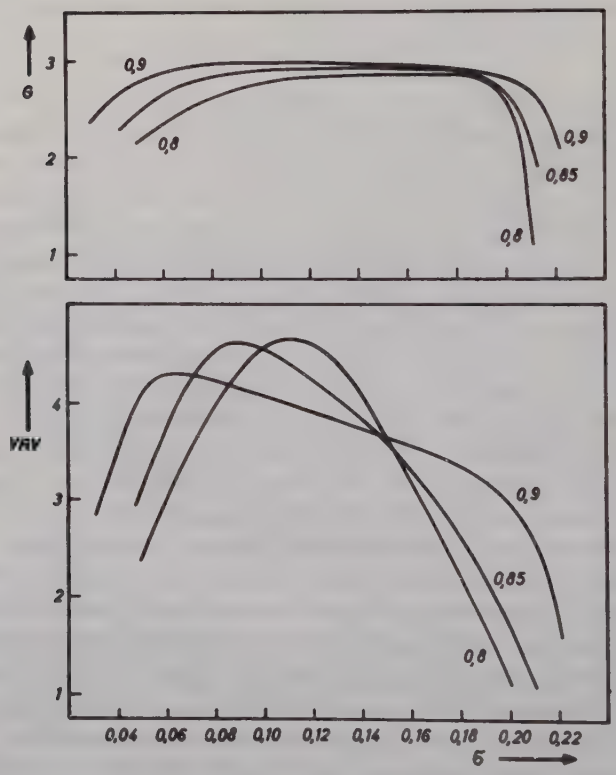

Abb.28. Gewinn G und Vorrückverhältnis VRV in Abhängigkeit von δ bei τ = 0,8, 0,85 und 0,9. Parameter : l_1=1375,4 mm, ϱ_{on}=4 mm, Z_L= 100 Ω .

Man sieht, daß der Gewinn mit wachsendem τ steigt. Gleichzeitig zeigt sich aber auch, daß über einen großen Öffnungswinkelbereich, etwa von δ =0,10 bis δ =0,18, die Halbwertsbreiten der Richtdiagramme nahezu konstant bleiben. Das entspricht bei τ =0,9 ungefähr den Winkeln α =14° bis α =8°. Unterhalb und oberhalb dieses Bereichs fällt der Gewinn stark ab. Das Vorrückverhältnis besitzt für alle drei Werte von τ ein scharfes Maximum, das für τ =0,8 bei δ =0,11, für τ=0,85 bei δ =0,09 und für τ =0,9 bei δ =0,06 liegt. Nach großen und kleinen δ hin ist vom Maximum aus jeweils ein monotoner Abfall des Vorrückverhältnisses zu beobachten. Aus diesen grafischen Darstellungen kann man nun dasjenige δ und damit den Öffnungswinkel α ablesen, für den bei vorgewähltem das beste Richtdiagramm resultiert.

Da das scharfe Maximum des VRV stets im Bereich des breiten Maximums des Gewinns liegt, ergibt sich ein eindeutiger Wert für den "optimalen" Winkel α , sofern man nur diese beiden Kriterien zur Bewertung der Antenne heranzieht.

7.2. Optimierung für N=12.

Die oben untersuchte Antenne kann man keineswegs als Breitbandantenne bezeichnen. Die Bandbreite beträgt aufgrund der Geometrie höchstens 1,23:1 z.B. bei τ =0,9. Man wird also die Anzahl der Strahler erhöhen müssen. Wir wollen hier nun wie bisher Antennen mit N=12 betrachten. Die übrigen Parameter lauten : l_1=1375 mm, τ =0,9, Z_L= 100Ω , ϱ_{on}= 4 mm. Bei der Optimierung zeigt sich, daß die numerische Rechnung durch Rundungsfehler der Maschine und vor allem unzureichende Darstellung der Integrandenfunktionen (vgl.4.) für den Gewinn und das Vorrückverhältnis in Abhängigkeit von δ keine glatten Funktionen mehr liefert, falls die Betriebsfrequenz in der oberen Hälfte des breitbandigen Arbeitsbereichs liegt. Bei N=3 haben alle Elemente einen Abstand von höchstens $\lambda/2$ voneinander. Die Strahlungskopplungskoeffizienten sind dann noch sehr gut zu berechnen. Bei N=12 ist die geometrische Ausdehnung der Antenne schon wesentlich größer. Die Strahlungs-

kopplungskoeffizienten weit voneinander entfernter Elemente lassen sich nicht mehr sinnvoll berechnen (vgl.4.). Die Fehler der numerischen Rechnung liegen teilweise in derselben Größenordnung wie die Änderungen, die sich aus der Wahl eines anderen σ ergeben. Die Betriebsfrequenz wird daher jetzt stets so gewählt, daß sich die aktive Zone im Bereich der längsten Antennenelemente befindet. Das Verhältnis Antennenausdehnung : Wellenlänge wird damit möglichst klein. Dann sind die Algorithmen zur Darstellung der Integrandenfunktionen durchaus noch vernünftig. Die Ergebnisse dieser Optimierung zeigt die Abbildung 29.

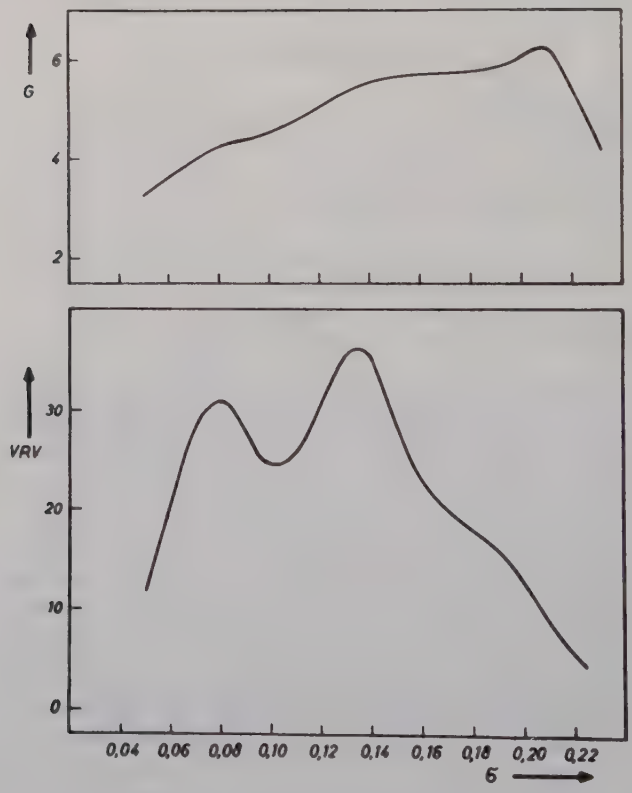

Abb.29. Gewinn G und Vorrückverhältnis VRV in Abhängigkeit von σ. Parameter : τ=0,9, N=12, l_1=1375 mm, Z_L= 100Ω, ϱ_{on} = 4 mm.

Auffällig ist, daß das Vorrückverhältnis zwei Maxima besitzt. Das erklärt sich folgendermaßen. Das VRV vergleicht lediglich die Strahlungsanteile in zwei ausgezeichneten Raumrichtungen. Es gibt keinen Aufschluß über sonstige Eigenschaften der Strahlungscharakteristiken, z.B. werden Auffächerungen der Richtdiagramme nicht erfaßt. Damit das VRV wirklich ein Maß für den Anteil der Rückstrahlung in den hinteren Halbraum der Antenne ist, dürfen Einsattelungen und Auffächerungen des Strahlungsdiagramms nicht auftreten.

Wir betrachten alle möglichen Raumrichtungen in einer kleinen Umgebung zur negativen x-Richtung. Für σ_1=0,08 besitzt die Strahlungscharakteristik ein relatives Minimum für diese negative x-Richtung. Das ergibt sich aus den Richtdiagrammen des Optimierungsprogramms. Bei σ_2=0,13 liegt dagegen in Richtung der negativen x-Achse ein relatives Maximum vor. Uns interessiert nur das zweite Maximum des VRV bei σ_2 = 0,13. Für $\sigma > \sigma_2$ steigt der Gewinn zunächst noch etwas an. Man wird als Kompromiß zwischen möglichst kleiner Rückstrahlung und hohem Gewinn beispielsweise σ =0,16 wählen und damit aus dieser Optimierung eine Antenne mit relativ gut bündelnder Richtcharakteristik erhalten.

Die gleiche Rechnung wurde noch für andere Sätze von Parametern durchgeführt, so z.B. für Antennen mit fünf Elementen. Es gibt für alle untersuchten Sätze von Parametern stets einen Bereich von Antennenöffnungswinkeln, in dem die Richtdiagramme die relativ besten Eigenschaften bezüglich Halbwertsbreite und Vorrückverhältnis besitzen. Zumindest in Bezug auf diese beiden Kriterien läßt sich damit eine Optimierung vornehmen. Analog zu der hier betrachteten Optimierung kann man versuchen, eine Optimierung bezüglich des Impedanzverhaltens durchzuführen.

8. Eigenschaften einer optimalen logarithmisch periodischen Dipolantenne.

8.1. Ergebnisse der Rechnungen und Messungen.

Die Abbildung 30 zeigt eine optimale log-per. Dipolantenne, die aus dem oben diskutierten Optimierungsprogramm hervorgegangen ist. Die Parameter dieser Antenne lauten :

l_1=1300 mm, h_1=200 mm, τ=0,9, Z_L=100 Ω , N=12, ϱ_{on}=4 mm .

Abb.30. Optimale log-per. Dipolantenne mit den Parametern : τ=0,9, h_1=200 mm, l_1=1300 mm, N=12, ϱ_{on}=4 mm, Z_L=100 Ω , σ^1=0,16.

Als Speiseleitung wird eine Doppelleitung aus Messingrohr verwendet, die in einem Plexiglasstab ruht. Die Antenne läßt sich mit gutem Erfolg in einem Frequenzbereich von 350 MHz bis 950 MHz verwenden. Innerhalb dieses Bereichs sind die Richtdiagramme nahezu konstant. Die Abbildung 31 zeigt einige in fünfter Näherung berechnete Richtdiagramme. Die berechneten Eingangswiderstände für verschiedene Frequenzen gibt Abbildung 32 wieder. Zwischen 350 MHz und 750 MHz ändert sich der Eingangswiderstand relativ wenig. Vergleicht man die berechneten Richtdiagramme und Eingangswiderstände mit denen der in Abschnitt 6 untersuchten Antenne, so erkennt man, daß sich außer den aus der Optimierung gewonnenen schärferen Strahlungscharakteristiken vor allem das Impedanzverhalten wesentlich verbessert hat. Man kann diese

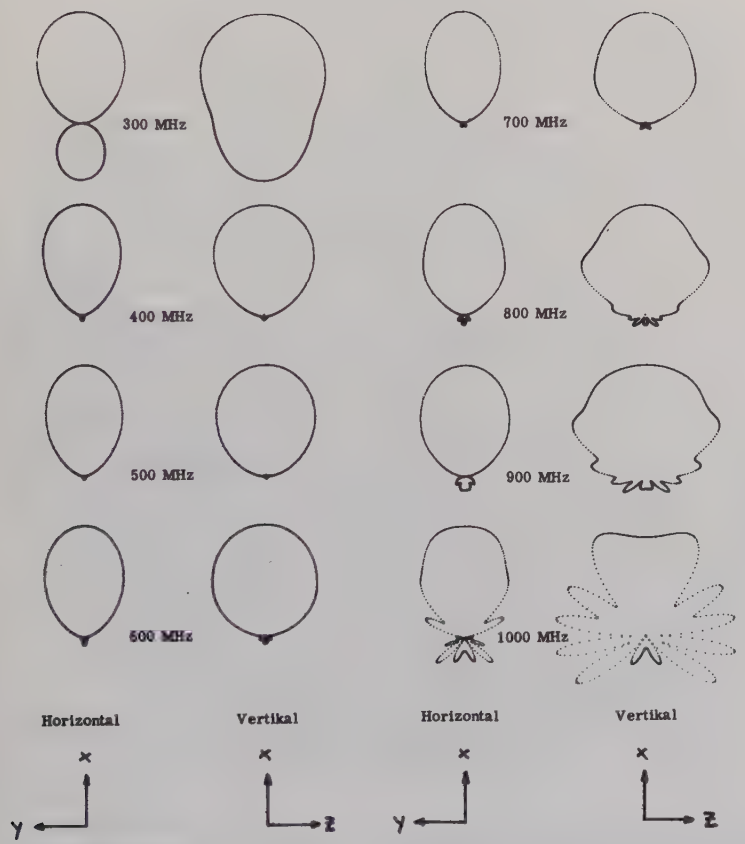

Abb. 31. Berechnete Richtdiagramme (5. Näherung) einer optimalen log-per. Dipolantenne mit den Parametern: $\tau = 0,9$, N=12, $Z_L = 100\Omega$, $h_1 = 200$ mm, $l_1 = 1300$ mm, $\varrho_{on} = 4$ mm.

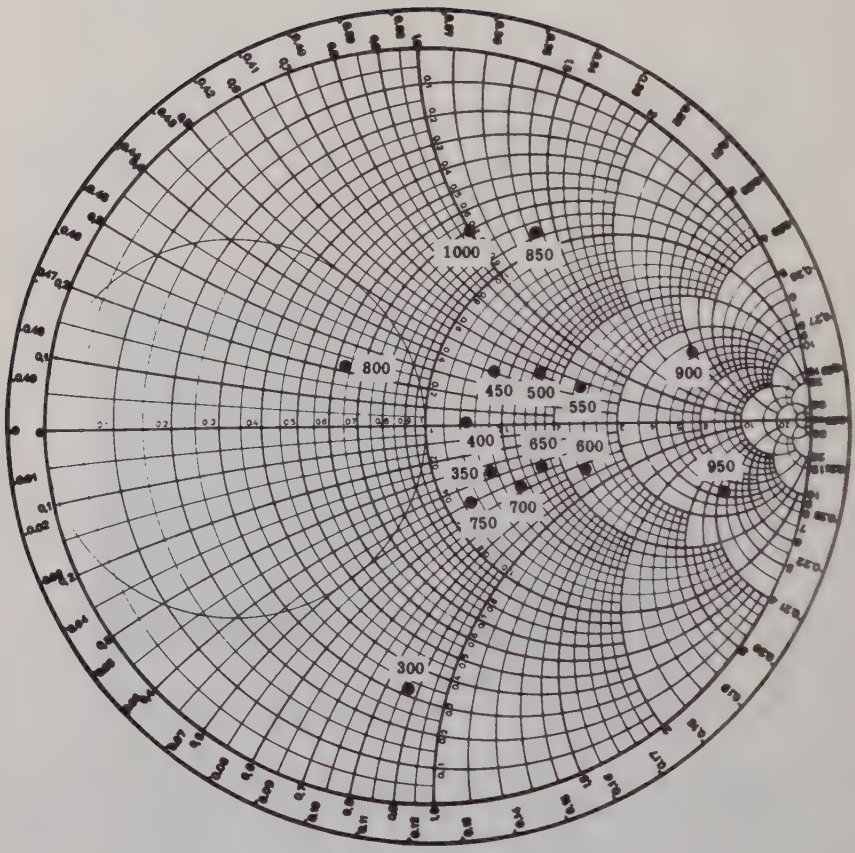

Abb. 32. Berechnete Eingangswiderstände (5. Näherung) der optimalen log-per. Dipolantenne mit den Parametern: $\tau = 0,9$, N=12, $Z_L = 100\,\Omega$, $h_1 = 200$ mm, $l_1 = 1300$ mm, $\vartheta_{0h} = 4$ mm. Frequenzangaben in MHz. Die Mitte des Smith-Diagramms entspricht $60\,\Omega$.

log-per. Dipolantenne auch bezüglich der Eingangsimpedanz durchaus als Breitbandantenne bezeichnen. Die gemessenen Eigenschaften dieser Antenne sind auszugsweise in den Abbildungen 33 bis 36 wiedergegeben. Sie stimmen sowohl bei den Richtdiagrammen als auch bei den Eingangswiderständen sehr gut mit den berechneten Eigenschaften überein. Die geringfügige Verschiebung der gemessenen Widerstandsortskurve in den induktiven Bereich des Smith-Diagramms ist auf nicht exakte Eliminierung der Leitungstransformation zurückzuführen, die durch das kurze Kabelstück an der Speisestelle der Antenne hervorgerufen wird.

8.2. Abhängigkeit der Antenneneigenschaften vom Dielektrikum der Speiseleitung.

In der Theorie der log-per. Dipolantenne bleibt die Geometrie der Speiseleitung unberücksichtigt. Nur die elektrischen Parameter wie Wellenwiderstand Z_L und Phasenkonstante α_0 beschreiben die Leitung. Bisher wurde in der Rechnung die Dielektrizitätskonstante ε stets gleich 1 gesetzt. Die Wellenlänge auf der Speiseleitung ist dann gleich der Wellenlänge im Vakuum. Die Speiseleitungen der experimentell untersuchten Antennen besitzen aus mechanischen Gründen alle Plexiglas als Dielektrikum. Die Dielektrizitätskonstante beträgt also etwa 2,1. Trotz dieser unterschiedlichen Parameter bei gemessenen und berechneten Antennen ist die Übereinstimmung zwischen Experiment und Rechnung sehr gut. Selbst eine so empfindliche Größe wie der Eingangswiderstand wird in seiner Frequenzabhängigkeit richtig beschrieben. Man vermutet daher, daß die Wahl des Dielektrikums relativ unkritisch ist, solange dieses verlustfrei und die Dielektrizitätskonstante nicht übermäßig groß ist, also etwa $\varepsilon \leq 3$ ist. Um dies zu erhärten, wird die optimale Antenne mit verschiedenen Werten für ε bei konstantem Wellenwiderstand Z_L berechnet. Insbesondere für Plexiglas als Dielektrikum wird die Rechnung noch einmal durchgeführt. Eine Änderung der Dielektrizitätskonstanten bei festem Wellenwiderstand der Leitung bedingt natürlich eine Änderung der Geometrie der Speiseleitung. Diese geht jedoch in die

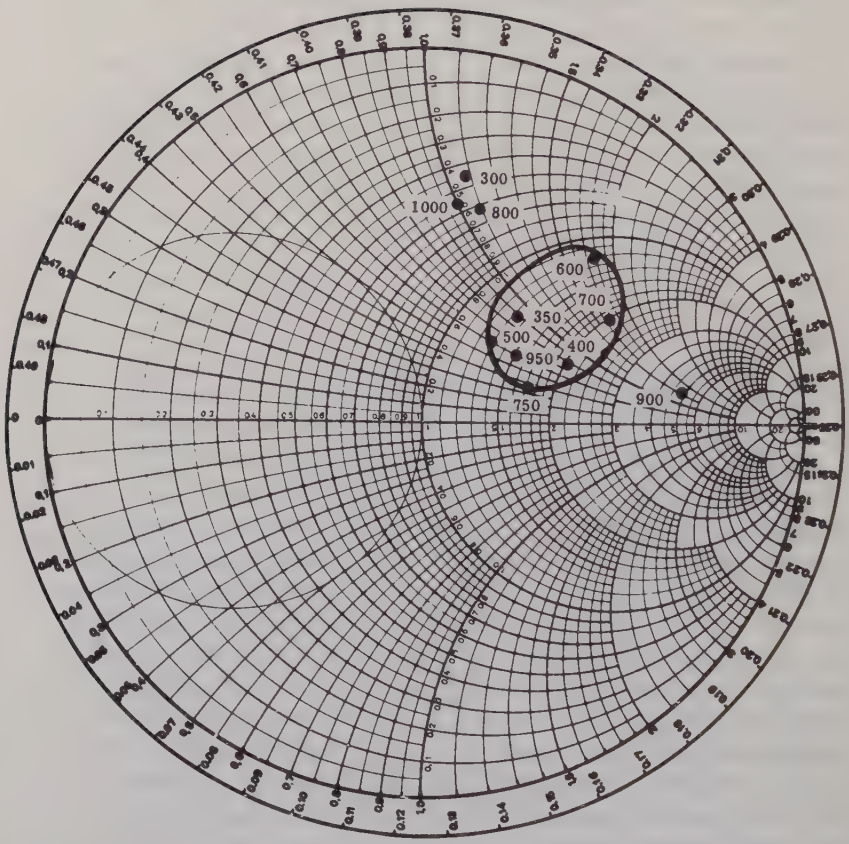

Abb. 33. Gemessene Eingangswiderstände der optimalen log-per. Dipolantenne mit den Parametern: τ=0, 9, N=12, Z_L = 100 Ω, h_1 = 200 mm, l_1 = 1300 mm, ϱ_{on} = 4 mm. Frequenzangaben in MHz. Die Mitte des Smith-Diagramms entspricht 60 Ω. Von 350 MHz bis 750 MHz verläuft die Widerstandsortskurve innerhalb des umrandeten Gebiets.

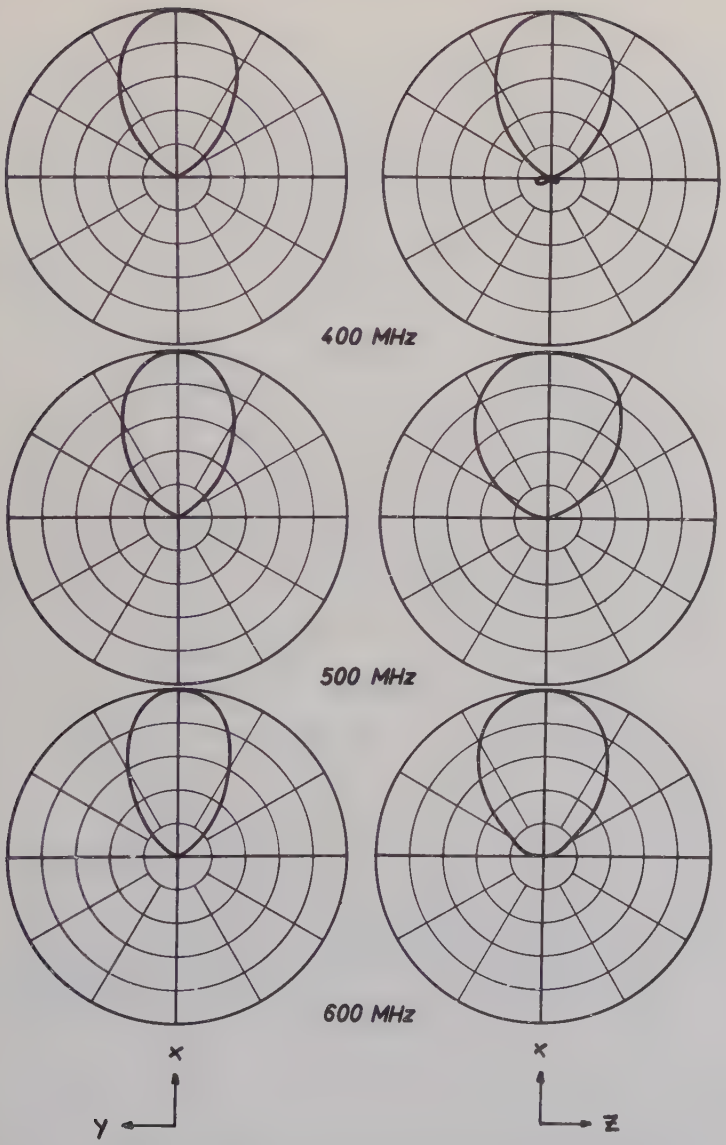

Abb. 34. Gemessene Richtdiagramme der optimalen log-per. Dipolantenne bei 400 MHz, 500 MHz und 600 MHz. Die Parameter der Antenne lauten: $\tau = 0,9$, $N = 12$, $Z_L = 100\Omega$, $h_1 = 200$ mm, $l_1 = 1300$ mm, $\varrho_{0h} = 4$ mm.

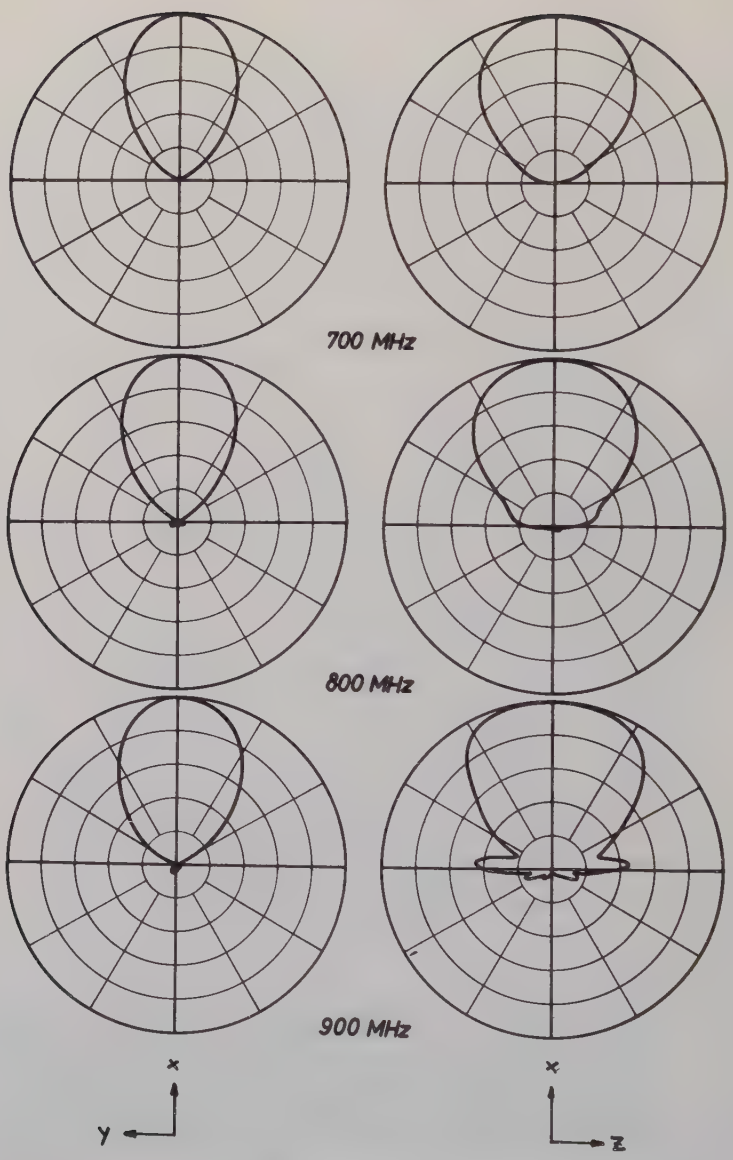

Abb. 35. Gemessene Richtdiagramme der optimalen log-per. Dipolantenne bei 700 MHz, 800 MHz und 900 MHz. Die Parameter der Antenne lauten: $\tau = 0{,}9$, $N = 12$, $Z_L = 100\Omega$, $h_1 = 200$ mm, $l_1 = 1300$ mm, $\varrho_{oh} = 4$ mm.

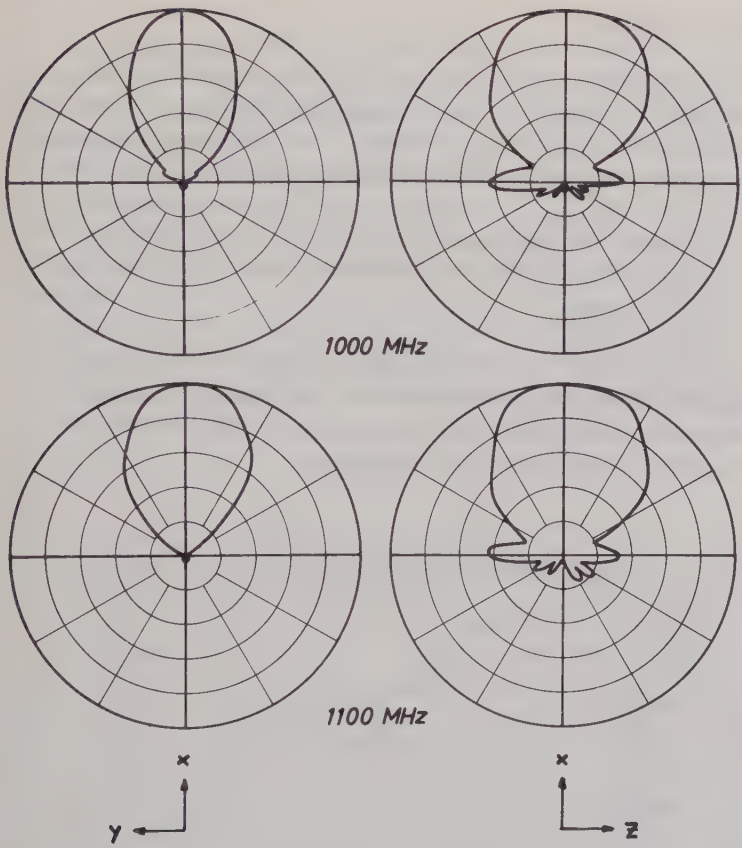

Abb. 36. Gemessene Richtdiagramme der optimalen log-per. Dipolantenne bei 1000 MHz und 1100 MHz. Die Parameter der Antenne lauten: $\tau = 0,9$, N=12, $Z_L = 100\Omega$, $h_1 = 200$ mm, $l_1 = 1300$ mm, $\varrho_{on} = 4$ mm.

Theorie nicht ein.

Es zeigt sich, daß für Plexiglas sowohl bei den Richtdiagrammen als auch bei den Eingangswiderständen nur geringe quantitative Unterschiede auftreten. Der Eingangswiderstand ändert sich zwar für eine bestimmte Frequenz, die gesamte Widerstandsortskurve liegt jedoch in demselben Gebiet im Smith-Diagramm. Mittelpunkt dieses kreisförmigen Gebiets ist wiederum ungefähr der Wellenwiderstand Z_L der unbelasteten Speiseleitung.

Die Abbildung 37 zeigt die Abhängigkeit des aus den Halbwertsbreiten der Richtdiagramme berechneten Gewinns der Antenne von der Dielektrizitätskonstanten der Speiseleitung bei sonst konstanten Parametern.

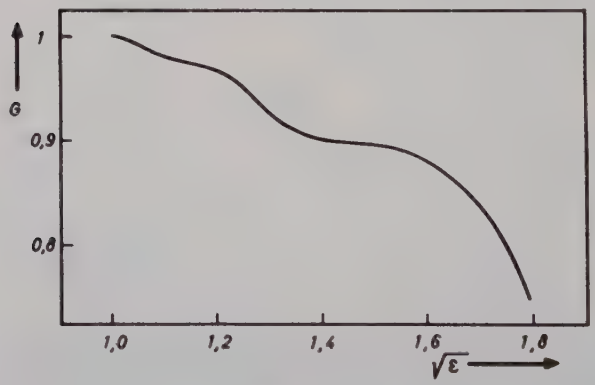

Abb.37. Gewinn G als Funktion der Dielektrizitätskonstanten der Speiseleitung. Normierung G=1 für $\varepsilon = 1$.

Man beobachtet für die am häufigsten verwendeten Dielektrika wie Trolitul und Plexiglas ein nur geringfügiges Absinken des Gewinns gegenüber $\varepsilon = 1$. Der Gewinn ist am größten für $\varepsilon = 1$, wenn also beide Phasenkonstanten α_0 und k_0 denselben Wert haben.

Auf eine weitergehende Diskussion dieser Antenne, insbesondere auf eine Beschreibung der Stromverteilung und der Konvergenzeigenschaften der Rechnung für diese speziellen Parameter kann verzichtet werden, da sich daraus keine grundsätzlich neuen Erkenntnisse mehr gewinnen lassen.

Wir haben damit durch eine rein numerische Optimierung eine log-per. Dipolantenne gewonnen, deren durch die Rechnung vorausgesagtes Verhalten von den Messungen sehr gut bestätigt wird und die in ihren Richtdiagrammen optimale Eigenschaften aufweist. Der numerische Aufwand hierzu ist zwar erheblich, erscheint aber durch die guten Ergebnisse gerechtfertigt.

9. Logarithmisch periodische V-Antennen.

9.1. Berechnung der Richtdiagramme bei bekannter Stromverteilung.

Log-per. Dipolantennen liefern nur dann gute Ergebnisse, wenn man sie im $\lambda/2$ Mode betreibt. In höheren Moden fächern die Richtdiagramme stark auf. Dies liegt zweifellos an den Einzeldiagrammen der strahlenden Elemente. Ein Betrieb in höheren Moden ist jedoch erwünscht, weil sich damit die Bandbreite der Struktur erheblich vergrößern läßt. V-Antennen als Einzelelemente bieten sich daher für die log-per. Antennen an (Abb.38).

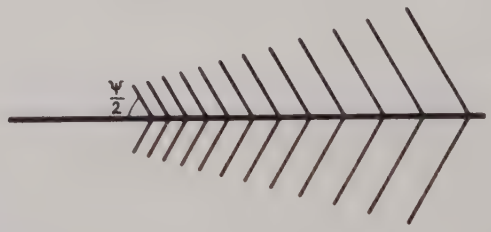

Abb.38. Logarithmisch periodische V-Antenne.

Es gibt keinen universellen Winkel Ψ, für den die Richtdiagramme der einzelnen V-Antennen in allen Resonanzen gleich gute Eigenschaften besitzen. In jeder Resonanz ergibt sich ein anderes Ψ für optimale Nebenzipfeldämpfung und Halbwertsbreite der Hauptkeule. Bei jedem Modewechsel entstehen außerdem Verwirrungsgebiete, die mit höherer Modenummer immer breiter werden. Aus diesen Gründen erscheint es sinnvoll, sich auf die untersten Moden, $\lambda/2$ und $3\lambda/2$, und damit auf ein einziges Verwirrungsgebiet zu beschränken. Der Öffnungswinkel Ψ kann dann optimal für den $3\lambda/2$ Mode gewählt werden. Die ganzzahligen Resonanzen sind wegen ihrer hohen Impedanz nicht angeregt.

Man kann den Winkel ψ , für den das günstigste Richtdiagramm des einzelnen V-förmigen Elements im $3\lambda/2$ Mode resultiert, entweder experimentell ermitteln, oder aber man berechnet unter der Annahme eines sinusförmigen Stromverlaufs allgemein das Fernfeld einer V-Antenne. Nachdem dieser optimale Winkel ψ gefunden worden ist, kann man eine optimal bündelnde log-per. Dipolantenne derart modifizieren, daß man bei gleichen Elementabständen auf der Speiseleitung statt der einzelnen Dipole die berechneten, im Vergleich zu den entsprechenden Dipolen etwa dreimal so langen Elemente benutzt. Die Vermutung, daß die günstige Gruppencharakteristik der log-per. Dipolantenne im $\lambda/2$ Mode und die im $3\lambda/2$ Mode relativ scharf bündelnde Einzelcharakteristik des V-Elements insgesamt ein sehr gutes Richtdiagramm ergeben werden, hat sich bestätigt. In [57] ist eine auf diese Weise experimentell entwickelte log-per. V-Antenne beschrieben worden.

Eine direkte Lösung des Randwertproblems für die log-per. V-Antenne ist mit großen Schwierigkeiten verbunden, da der Hertzsche Vektor hierfür zwei von Null verschiedene Komponenten besitzt. Hier soll zur Berechnung des Fernfeldes log-per. V-Antennen folgender Weg beschritten werden. Nach der in Abschnitt 3 dargestellten Theorie läßt sich die Stromverteilung einer log-per. Dipolantenne berechnen. Nun wird sich die Stromverteilung nicht wesentlich ändern, wenn die Hälften der einzelnen Strahler einen Winkel ψ von nahezu 180° miteinander bilden. Die Speiseleitung bleibt unverändert, lediglich die Strahlungskopplung der Elemente aufeinander wird verändert. Je näher der Winkel ψ bei 180° liegt, desto besser wird die Näherung sein. Unter dieser Annahme der gleichen Stromverteilung von log-per. Dipolantenne und korrespondierender log-per. V-Antenne läßt sich das Fernfeld der log-per. V-Antenne exakt berechnen. Diese Rechnung liefert verständlicherweise wesentlich bessere Ergebnisse als etwa eine leitungstheoretische Näherung, die von einem rein sinusförmigen Stromansatz für die nahezu $\lambda/2$ langen Elemente ausgeht.

Die Dicke der einzelnen Antennenelemente geht im Gegensatz zur strengen Theorie für die log-per. Dipolantenne bei der Berechnung des Fernfeldes der log-per. V-Antenne

nur in die Stromverteilung ein. Für die Berechnung des Fernfelds aus dieser Stromverteilung werden unendlich dünne Drähte vorausgesetzt. Der Fehler, der dadurch auftritt, liegt wesentlich unter dem, der durch die Übernahme der Stromverteilung von der korrespondierenden log-per. Dipolantenne gemacht wird.

Die Antenne möge folgendermaßen in einem Koordinatensystem liegen (Abb.39). Wir betrachten zunächst ein Antennenelement. Das Element liege derart in der x,y-Ebene, daß sich der Speisepunkt im Koordinatenursprung befindet und die x-Achse den Winkel zwischen den Armen des V halbiert.

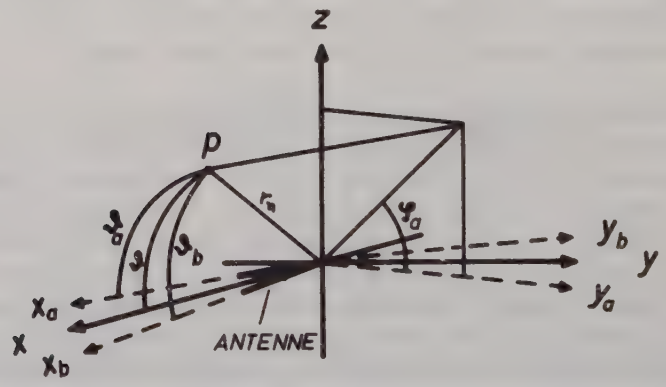

Abb.39. Koordinatensystem zur Berechnung des Fernfelds einer V-Antenne.

Wir behandeln nun das Strahlungsfeld einer Elementhälfte. Allgemein ist der Hertzsche Vektor des Strahlungsfeldes gegeben durch

$$\Pi = \frac{1}{4\pi i \omega \varepsilon_0} \iiint \mathfrak{J}_v \frac{e^{-ik_0 r_v}}{r_v} dv \,. \qquad (109)$$

Hierbei ist $\mathfrak{J}_v$ die Stromdichte. Da die Strahler unendlich dünn sein sollen, die Stromdichte also über den gesamten Elementquerschnitt konstant sein soll, kann man die Volumen-

integration umformen in eine eindimensionale Integration bezüglich x_a. Gleichzeitig darf im Fernfeld näherungsweise gesetzt werden

$$r_v = r_n - x_a \cos \vartheta_a \,. \tag{110}$$

Der Korrekturterm $x_a \cos \vartheta_a$ braucht nur in der schnell veränderlichen Größe $e^{-ik_0 r_v}$ berücksichtigt zu werden, so daß insgesamt für den Hertzschen Vektor der Hälfte a des n-ten Elements folgt

$$\Pi_{x_a n} = \frac{1}{4\pi i \omega \varepsilon_0} \frac{e^{-ik_0 r_n}}{r_n} \int_0^{h_n} I_n(x_a)\, e^{ik_0 x_a \cos \vartheta_a}\, dx_a \,, \tag{111}$$

$$\Pi_{x_a n} = \frac{1}{4\pi i \omega \varepsilon_0} \frac{e^{-ik_0 r_n}}{r_n} \left\{ \int_0^{h_n} I_n(x_a) \cos(k_0 x_a \cos \vartheta_a)\, dx_a + i \int_0^{h_n} I_n(x_a) \sin(k_0 x_a \cos \vartheta_a)\, dx_a \right\} . \tag{112}$$

Der Antennenstrom $I_n(x_a)$ läßt sich auf beiden Teilen des V in eine Fourierreihe entwickeln. Beide Teile a und b der V-Antenne sind geometrisch gleich und die Speisung erfolgt symmetrisch. Diese Symmetrie bedingt, daß die Fourierentwicklung nur ungeradzahlige Kosinusfunktionen enthält.

$$I_n(x_a) = \sum_{s=1,3,5,\ldots} A_{ns} \cos\left(s \frac{\pi}{2} \frac{x_a}{h_n}\right) . \tag{113}$$

Die Koeffizienten A_{ns} sind bekannt unter der Annahme, daß die Stromverteilungen von log-per. V-Antenne und log-per. Dipolantenne identisch sind. Setzen wir Gl.(113) in Gl.(112) ein, so folgt

$$\Pi_{x_a n} = \frac{1}{4\pi i \omega \varepsilon_0} \frac{e^{-ik_0 r_n}}{r_n} \sum_{s=1,3,5,\ldots} A_{ns} \left[\int_0^{h_n} \cos\left(s \frac{\pi}{2} \frac{x_a}{h_n}\right) \cos(k_0 x_a \cos \vartheta_a)\, dx_a + i \int_0^{h_n} \cos\left(s \frac{\pi}{2} \frac{x_a}{h_n}\right) \sin(k_0 x_a \cos \vartheta_a)\, dx_a \right] . \tag{114}$$

Die Integrale sind elementar auswertbar. Es gelten die Beziehungen

$$\int \cos ax \cos bx\, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2\,(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2\,(a+b)} \,, \tag{115}$$

$$\int \cos ax \sin bx \, dx = -\frac{\cos(b+a)x}{2(b+a)} - \frac{\cos(b-a)x}{2(b-a)} \quad . \tag{116}$$

Damit folgt

$$\int_0^{h_n} \cos\left(s\frac{\pi}{2}\frac{x_a}{h_n}\right)\cos(k_0 x_a \cos\vartheta_a)\, dx_a = \frac{2h_n}{\pi}\cos(k_0 h_n \cos\vartheta_a)\,\frac{s\,(-1)^{\frac{s-1}{2}}}{s^2 - \left(\frac{2h_n}{\pi}k_0\cos\vartheta_a\right)^2} \tag{117}$$

$$\int_0^{h_n} \cos\left(s\frac{\pi}{2}\frac{x_a}{h_n}\right)\sin(k_0 x_a \cos\vartheta_a)\, dx_a = \frac{2h_n}{\pi}\,\frac{s(-1)^{\frac{s-1}{2}}\sin(k_0 h_n\cos\vartheta_a) - \frac{2h_n}{\pi}k_0\cos\vartheta_a}{s^2 - \left(\frac{2h_n}{\pi}k_0\cos\vartheta_a\right)^2} \quad . \tag{118}$$

Der Hertzsche Vektor des Teils a vom Element n lautet damit

$$\Pi_{x_a n} = \frac{1}{4\pi i\omega\varepsilon_0}\,\frac{e^{-ik_0 r_n}}{r_n}\,\frac{2h_n}{\pi}\sum_{s=1,3,5,\ldots} B_{ns}\,\frac{s(-1)^{\frac{s-1}{2}}\, e^{ik_0 h_n\cos\vartheta_a} - i\frac{2h_n}{\pi}k_0\cos\vartheta_a}{s^2 - \left(\frac{2h_n}{\pi}k_0\cos\vartheta_a\right)^2} \quad . \tag{119}$$

Man interessiert sich weniger für den Hertzschen Vektor als für die elektrische Feldstärke im Fernfeld, insbesondere für die E_{ϑ_a}-Komponente. Diese läßt sich relativ leicht aus dem Hertzschen Vektor gewinnen.

Betrachten wir noch einmal das kartesische Koordinatensystem x_a, y_a, z und das zugeordnete Kugelkoordinatensystem r_n, ϑ_a, φ_a mit x_a als Polarachse. Es gelten zwischen beiden Koordinatensystemen folgende Relationen:

$$\begin{aligned} x_a &= r_n \cos\vartheta_a \,, \\ y_a &= r_n \sin\vartheta_a \cos\varphi_a \,, \\ z &= r_n \sin\vartheta_a \sin\varphi_a \,. \end{aligned} \tag{120}$$

Da der Hertzsche Vektor des betrachteten Antennenarms nur eine Komponente in Richtung x_a besitzt, folgt aus den bekannten Transformationsgleichungen für die Divergenz und die ϑ_a-Komponente des Gradienten

$$\operatorname{div}\Pi_{an} = \frac{1}{r_n^2}\frac{\partial}{\partial r_n}\left(r_n^2\cos\vartheta_a\,\Pi_{x_a n}\right) - \frac{1}{r_n\sin\vartheta_a}\frac{\partial}{\partial\vartheta_a}\left(\sin^2\vartheta_a\,\Pi_{x_a n}\right), \tag{121}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}_{\vartheta_a}\operatorname{div}\Pi_{an} &= \frac{1}{r_n}\frac{\partial}{\partial\vartheta_a}\left(\operatorname{div}\Pi_{an}\right)\\ &= \frac{1}{r_n^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta_a}\left(\cos\vartheta_a\frac{\partial}{\partial r_n}\left(r_n^2\Pi_{x_a n}\right)\right) - \frac{1}{r_n^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta_a}\left(\frac{1}{\sin\vartheta_a}\frac{\partial}{\partial\vartheta_a}\left(\sin^2\vartheta_a\,\Pi_{x_a n}\right)\right).\end{aligned} \tag{122}$$

Hierin sind $\Pi_{r_n n}$ und $\Pi_{\vartheta_a n}$ durch $\Pi_{x_a n}$ ausgedrückt gemäß den Relationen

$$\Pi_{r_n n} = \cos\vartheta_a\,\Pi_{x_a n} \quad \text{und} \quad \Pi_{\vartheta_a n} = -\sin\vartheta_a\,\Pi_{x_a n}\,. \tag{123}$$

Die ϑ_a-Komponente der elektrischen Feldstärke lautet

$$E_{\vartheta_a n} = k_0^2\,\Pi_{\vartheta_a n} + \operatorname{grad}_{\vartheta_a}\operatorname{div}\Pi_{an}\,. \tag{124}$$

Wegen Gl.(123) folgt mit den Gl.(121) und Gl.(122) aus Gl.(124)

$$\begin{aligned}E_{\vartheta_a n} = -k_0^2\sin\vartheta_a\,\Pi_{x_a n} &+ \frac{1}{r_n^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta_a}\left(\cos\vartheta_a\frac{\partial}{\partial r_n}\left(r_n^2\Pi_{x_a n}\right)\right)\\ &- \frac{1}{r_n^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta_a}\left(\frac{1}{\sin\vartheta_a}\frac{\partial}{\partial\vartheta_a}\left(\sin^2\vartheta_a\,\Pi_{x_a n}\right)\right).\end{aligned} \tag{125}$$

Alle Beiträge, die stärker als $1/r_n$ abfallen, brauchen im Fernfeld nicht berücksichtigt zu werden. Wie man sich leicht überzeugt, sind dies die letzten beiden Terme der Gl.(125), da $\Pi_{x_a n}$ eine r_n-Abhängigkeit $\frac{1}{r_n}e^{-ik_0 r_n}$ besitzt. Damit erhalten wir für die ϑ_a-Komponente der elektrischen Feldstärke im Fernfeld

$$E_{\vartheta_a n} = -k_0^2\sin\vartheta_a\,\Pi_{x_a n}\,. \tag{126}$$

Setzen wir Gl.(119) in Gl.(126) ein, so ergibt sich schließlich

$$E_{\vartheta_a n} = -\frac{k_0^2\sin\vartheta_a}{4\pi i\omega\varepsilon_0}\frac{e^{-ik_0 r_n}}{r_n}\frac{2h_n}{\pi}\sum_{s=1,3,5,\ldots}A_{ns}\,\frac{s(-1)^{\frac{s-1}{2}}\,e^{ik_0 h_n\cos\vartheta_a} - i\frac{2h_n}{\pi}k_0\cos\vartheta_a}{s^2 - \left(\frac{2h_n}{\pi}k_0\cos\vartheta_a\right)^2}\,. \tag{127}$$

Die gleiche Rechnung kann man für den Antennenarm b durchführen. Da der Strom im Arm b sich nur durch das Vorzeichen von dem des Armes a unterscheidet, gilt hier

$$E_{\vartheta_b n} = - E_{\vartheta_a n} \quad . \tag{128}$$

Die Abbildung 40 zeigt das Koordinatensystem zur Umrechnung der sphärischen Koordinaten. In den sphärischen Dreiecken $Q_a PQ$ bzw. $Q_b PQ$ gelten die Beziehungen [81]

$$\cos\vartheta_a = \cos\vartheta\cos\tfrac{\psi}{2} - \sin\vartheta\sin\tfrac{\psi}{2}\cos\zeta \quad , \tag{129}$$

$$\cos\vartheta_b = \cos\vartheta\cos\tfrac{\psi}{2} + \sin\vartheta\sin\tfrac{\psi}{2}\cos\zeta \quad . \tag{130}$$

Aus der Abbildung folgt

$$\cos\vartheta = \cos\eta\cos\varphi \quad , \tag{131}$$

$$\sin\vartheta = (1 - \cos^2\eta\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}} , \tag{132}$$

$$\cos\eta\sin\varphi = \sin\vartheta\cos\zeta \quad . \tag{133}$$

Damit ergibt sich

$$\cos\vartheta_a = \cos\eta\left[\cos\varphi\cos\tfrac{\psi}{2} - \sin\varphi\sin\tfrac{\psi}{2}\right] = \cos\eta\cos\left(\varphi + \tfrac{\psi}{2}\right) , \tag{134}$$

$$\cos\vartheta_b = \cos\eta\left[\cos\varphi\cos\tfrac{\psi}{2} + \sin\varphi\sin\tfrac{\psi}{2}\right] = \cos\eta\cos\left(\varphi - \tfrac{\psi}{2}\right) . \tag{135}$$

Für die elektrische Feldstärke im Fernfeld gilt damit

$$E_{\vartheta_a,\vartheta_b n} = \mp \frac{k_0^2}{4\pi i\omega\varepsilon_0}\sqrt{1-\cos^2\eta\cos^2(\varphi\pm\tfrac{\psi}{2})}\;\frac{e^{-ik_0 r_n}}{r_n}\;\frac{2h_n}{\pi}\cdot$$

$$\cdot\sum_{s=1,3,5,\dots} A_{ns}\,\frac{s(-1)^{\frac{s-1}{2}}\,e^{ik_0 h_n\cos\eta\cos(\varphi\pm\frac{\psi}{2})} - i\frac{2h_n}{\pi}k_0\cos\eta\cos(\varphi\pm\frac{\psi}{2})}{s^2 - \left(\frac{2h_n}{\pi}k_0\cos\eta\cos(\varphi\pm\frac{\psi}{2})\right)^2} . \tag{136}$$

Die elektrischen Feldvektoren $\mathbf{E}_{an}$ und $\mathbf{E}_{bn}$ stehen in jedem fernen Punkt des Raumes senkrecht zum Radiusvektor $R_0 (= r_n)$

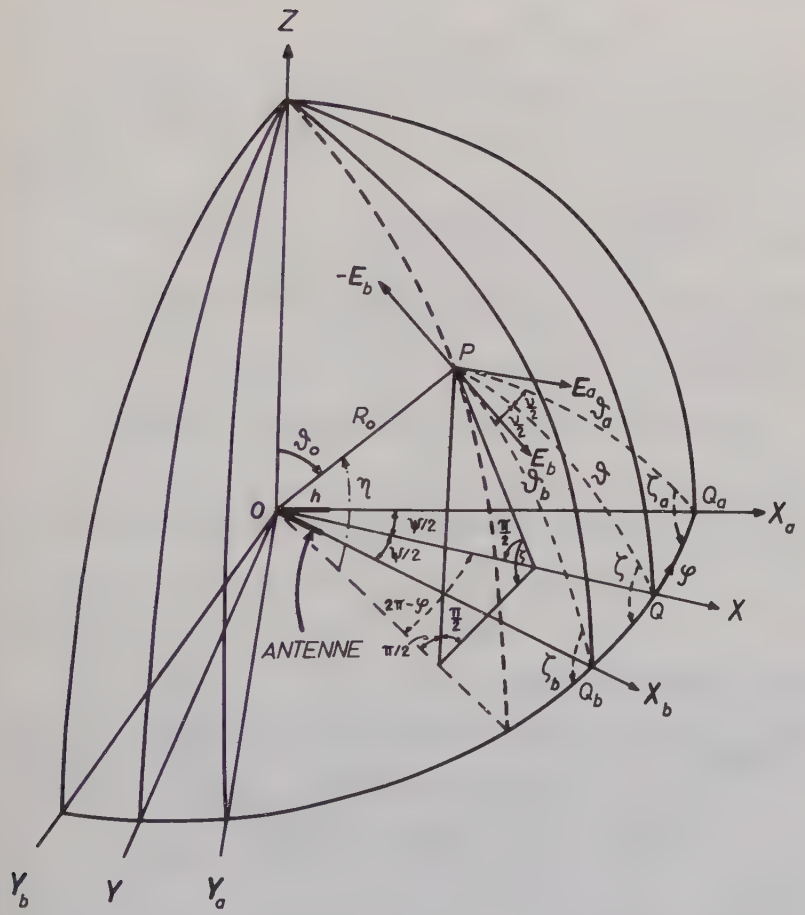

Abb. 40. Koordinatensystem zur Berechnung des Fernfeldes einer V-Antenne.

und tangential zu Großkreisen zu ϑ_a und ϑ_b . Der resultierende Feldvektor E_{rn} ergibt sich durch Vektoraddition

$$E_{rn} = E_{an} + E_{bn} \quad . \quad (137)$$

Dies liefert im allgemeinen sehr komplizierte Ausdrücke. Wesentlich einfacher dagegen sind die zwei hauptsächlich interessierenden Spezialfälle zu behandeln, nämlich

1. das Fernfeld in der Horizontalebene, die die log-per. V-Antenne enthält und durch $\eta = 0$ definiert ist, und

2. das Fernfeld in der Vertikalebene, die den Winkel zwischen den beiden Armen des V halbiert und durch $\varphi = 0, \pi$ definiert ist.

Für diese beiden Fälle sollen die Lösungen angegeben werden.

1. In der Horizontalebene ist das resultierende Feld sehr einfach zu berechnen, da E_{an} und E_{bn} parallel verlaufen. Dann folgt

$$E_{\vartheta n}^{Hori} = E_{\vartheta_a n} + E_{\vartheta_b n} \quad . \quad (138)$$

Für $\eta = 0$ ergibt sich damit

$$E_{\vartheta_a \vartheta_b n}^{Hori} = \mp \frac{k_0^2}{4\pi i w \varepsilon_0} \sqrt{1 - \cos^2\left(\varphi \pm \tfrac{\psi}{2}\right)} \frac{e^{-i k_0 r_n}}{r_n} \frac{2 h_n}{\pi} \cdot \cdot \sum_{s=1,3,5,\ldots} A_{ns} \frac{s(-1)^{\frac{s-1}{2}} e^{i k_0 h_n \cos(\varphi \pm \frac{\psi}{2})} - i \frac{2 h_n}{\pi} k_0 \cos(\varphi \pm \frac{\psi}{2})}{s^2 - \left(\frac{2 h_n}{\pi} k_0 \cos(\varphi \pm \frac{\psi}{2})\right)^2} \quad (139)$$

$$E_{\vartheta n}^{Hori} = - \frac{k_0^2}{4\pi i w \varepsilon_0} \frac{e^{-i k_0 r_n}}{r_n} \frac{2 h_n}{\pi} \sum_{s=1,3,5,\ldots} A_{ns} \cdot \left\{ \sin\left(\varphi + \tfrac{\psi}{2}\right) \frac{s(-1)^{\frac{s-1}{2}} e^{i k_0 h_n \cos(\varphi + \frac{\psi}{2})} - i \frac{2 h_n}{\pi} k_0 \cos(\varphi + \frac{\psi}{2})}{s^2 - \left(\frac{2 h_n}{\pi} k_0 \cos(\varphi + \frac{\psi}{2})\right)^2} \right. \quad (140)$$

$$\left. - \sin\left(\varphi - \tfrac{\psi}{2}\right) \frac{s(-1)^{\frac{s-1}{2}} e^{i k_0 h_n \cos(\varphi - \frac{\psi}{2})} - i \frac{2 h_n}{\pi} k_0 \cos(\varphi - \frac{\psi}{2})}{s^2 - \left(\frac{2 h_n}{\pi} k_0 \cos(\varphi - \frac{\psi}{2})\right)^2} \right\} .$$

Summiert man nun über die ganze Gruppe und berücksichtigt

$$r_n = r + l_n \cos\varphi \tag{141}$$

nur in der schnell veränderlichen Größe $e^{-ik_0 r_n}$, dann erhält man schließlich für die ϑ-Komponente der elektrischen Feldstärke der gesamten log-per. V-Antenne in der Horizontalebene

$$E_\vartheta^{Hori} = -\frac{k_0^2}{2\pi^2 i\omega\varepsilon_0}\,\frac{e^{-ik_0 r}}{r}\sum_{n=1}^{N}\Bigg[h_n e^{-ik_0 l_n\cos\varphi}\sum_{s=1,3,5,\dots} A_{ns}\cdot\Bigg\{\sin\left(\varphi+\tfrac{\psi}{2}\right)\frac{s(-1)^{\frac{s-1}{2}}\,e^{ik_0 h_n\cos(\varphi+\frac{\psi}{2})} - i\frac{2h_n}{\pi}k_0\cos(\varphi+\frac{\psi}{2})}{s^2-\left(\frac{2h_n}{\pi}k_0\cos(\varphi+\frac{\psi}{2})\right)^2} \tag{142}$$

$$-\sin\left(\varphi-\tfrac{\psi}{2}\right)\frac{s(-1)^{\frac{s-1}{2}}\,e^{ik_0 h_n\cos(\varphi-\frac{\psi}{2})} - i\frac{2h_n}{\pi}k_0\cos(\varphi-\frac{\psi}{2})}{s^2-\left(\frac{2h_n}{\pi}k_0\cos(\varphi-\frac{\psi}{2})\right)^2}\Bigg\}\Bigg].$$

2. Die Vertikalebene ist definiert durch $\varphi = 0, \pi$.

Offensichtlich sind hier $E_{\vartheta n}$ und $E_{\vartheta n}$ gleich.
Damit folgt einfach

$$E_{\vartheta_n}^{Vert} = 2\,E_{\vartheta_a n}\sin\tfrac{1}{2}\upsilon \quad . \tag{143}$$

E_{rn} steht senkrecht auf der Vertikalebene. Mit $\eta = \vartheta$, $\varphi = 0, \pi$ folgt aus bekannten Gleichungen der sphärischen Trigonometrie

$$\sin\tfrac{1}{2}\upsilon = \frac{\sin\frac{\psi}{2}}{\sin\vartheta_a} = \frac{\sin\frac{\psi}{2}}{\sqrt{1-\cos^2\vartheta\cos^2\frac{\psi}{2}}} \quad . \tag{144}$$

Für die komplexe Amplitude des resultierenden Feldvektors ergibt sich damit bei gleichzeitiger Summation über die ganze Gruppe und mit der Gleichung

$$r_n = r + l_n\cos\vartheta \tag{145}$$

in der Vertikalebene

$$E_{\vartheta}^{\text{Vert}} = -\frac{k_0^2}{\pi^2 i\omega\varepsilon_0}\,\frac{e^{-ik_0 r}}{r}\,\sin\frac{\psi}{2}\sum_{n=1}^{N}\Bigg[h_n e^{-ik_0 l_n\cos\vartheta}\cdot$$

$$\cdot\sum_{s=1,3,5,\ldots} A_{ns}\,\frac{s(-1)^{\frac{s-1}{2}}\,e^{ik_0 h_n\cos\vartheta\cos\frac{\psi}{2}} - i\frac{2h_n}{\pi}k_0\cos\vartheta\cos\frac{\psi}{2}}{s^2-\left(\frac{2h_n}{\pi}k_0\cos\vartheta\cos\frac{\psi}{2}\right)^2}\Bigg]. \qquad (146)$$

Wir wollen noch den Spezialfall $\psi = \pi$ untersuchen. In der Horizontalebene folgt hierfür

$$E_{\vartheta}^{\text{Hori}} = -\frac{k_0^2}{\pi^2 i\omega\varepsilon_0}\,\frac{e^{-ik_0 r}}{r}\,\cos\varphi\sum_{n=1}^{N}\Bigg[h_n e^{-ik_0 l_n\cos\varphi}\cdot$$

$$\cdot\sum_{s=1,3,5,\ldots} A_{ns}\,\frac{s(-1)^{\frac{s-1}{2}}\cos(k_0 h_n\sin\varphi)}{s^2-\left(\frac{2h_n}{\pi}k_0\sin\varphi\right)^2}\Bigg]. \qquad (147)$$

Für die Vertikalebene gilt entsprechend

$$E_{\vartheta}^{\text{Vert}} = -\frac{k_0^2}{\pi^2 i\omega\varepsilon_0}\,\frac{e^{-ik_0 r}}{r}\sum_{n=1}^{N}\Bigg[h_n e^{-ik_0 l_n\cos\vartheta}\sum_{s=1,3,5,\ldots} A_{ns}\,\frac{1}{s}(-1)^{\frac{s-1}{2}}\Bigg]. \qquad (148)$$

Der Feldberechnung für die log-per. V-Antenne liegt ein anderes Kugelkoordinatensystem zugrunde als der Feldberechnung für die log-per. Dipolantenne. Um die beiden letzten Gleichungen mit denen der log-per. Dipolantenne vergleichen zu können, hat man in der Gl.(94) die Transformation

$$\sin\varphi \Longrightarrow \cos\vartheta \qquad \text{in der Vertikalebene} \qquad \vartheta = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{und} \quad \left\{\begin{matrix}\sin\vartheta \Rightarrow \cos\varphi \\ \cos\vartheta \Rightarrow \sin\varphi\end{matrix}\right\} \qquad \text{in der Horizontalebene} \qquad \varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

durchzuführen. Damit folgt aus Gl.(94)

1. in der Horizontalebene

$$E_{\vartheta}^{\text{Hori}} = -\frac{k_0^2}{\pi^2 i\omega\varepsilon_0}\,\frac{e^{-ik_0 r}}{r}\,\cos\varphi\sum_{n=1}^{N}\Big[J_0(k_0\cos\varphi\,s_{on})\,h_n\cdot$$

$$\cdot e^{-ik_0 l_n\cos\varphi}\sum_{s=1,3,5,\ldots} A_{ns}\,\frac{s(-1)^{\frac{s-1}{2}}\cos(k_0 h_n\sin\varphi)}{s^2-\left(\frac{2h_n}{\pi}k_0\sin\varphi\right)^2}\Big]. \qquad (149)$$

und 2. in der Vertikalebene

$$E_{\vartheta}^{Vert} = -\frac{k_0^2}{\pi^2 i\omega\varepsilon_0}\,\frac{e^{-ik_0 r}}{r}\sum_{n=1}^{N}\left[J_0(k_0 s_{on})h_n e^{-ik_0 l_n\cos\vartheta}\sum_{s=1,3,5,..} B_{ns}\,\frac{1}{s}(-1)^{\frac{s-1}{2}}\right]. \quad (150)$$

Bis auf den Besselterm J_0 sind die Gleichungen (147) und (149) sowie Gl.(148) und Gl.(150) identisch. Dieser Term beschreibt genau den Einfluß der endlichen Dicke der einzelnen Antennenelemente auf das Fernfeld (vgl.3.).

9.2. Ergebnisse der Rechnungen und Messungen.

Wir untersuchen zunächst die Richtdiagramme der log-per. V-Antenne. Die Richtdiagramme werden für zwei Frequenzen, nämlich für 150 MHz und 450 MHz, mit Hilfe der in den Abbildungen 19 und 20 für die korrespondierende log-per. Dipolantenne dargestellten Stromverteilungen berechnet. Beide Frequenzen entsprechen bei der gewählten Geometrie der Antenne einem Betriebszustand, bei dem die aktive Zone etwa in der Mitte der Antenne liegt. Die Antenne arbeitet bei 150 MHz im $\lambda/2$-Mode, bei 450 MHz im $3\lambda/2$-Mode. Der Winkel soll optimal für den $3\lambda/2$-Mode gewählt werden. Die Rechnung liefert bei 450 MHz für verschiedene ψ folgende Ergebnisse.

Für $\psi = 180^\circ$, für die korrespondierende Dipolantenne also, ergeben sich in der Horizontalcharakteristik stark aufgefächerte Richtdiagramme. Es tritt deutlich die Charakteristik des einzelnen $3\lambda/2$ langen Dipols hervor. Mit kleinerem Winkel ψ nimmt die Abstrahlung in Vorwärtsrichtung zu. Die Seitenkeulen werden schwächer. Bei etwa $\psi = 110^\circ$ ist ein relatives Optimum der Richtdiagramme bezüglich Halbwertsbreite, Vorrückverhältnis und Nebenzipfeldämpfung erreicht. Dies entspricht dem in der Arbeit [57] gefundenen optimalen Winkel. Wird ψ weiter verkleinert, so treten im Horizontaldiagramm wieder stärkere Nebenzipfel auf. Im Vertikaldiagramm verringert sich die Halbwertsbreite zwar noch etwas, jedoch sind die Antennenelemente bereits so nah aneinandergerückt,

daß die für die Feldberechnung benutzte Stromverteilung der log-per. Dipolantenne mit Sicherheit die tatsächlichen Verhältnisse auf der log-per. V-Antenne nicht mehr richtig wiedergibt.

Die berechneten Richtdiagramme für $\psi = 110^{\circ}$ bei 150 MHz und 450 MHz zeigt die Abbildung 42. Zum Vergleich sind die gemessenen Richtdiagramme dieser Antenne (Abb.41) mit eingezeichnet.

Abb.41. Log-per. 110°-V-Antenne mit den Parametern: τ=0,9, N=12, Z_L=52Ω, h_1=750mm, l_1=1375mm, ϱ_{on}=4mm.

Abbildung 43 gibt zusätzlich einige gemessene Richtdiagramme wieder. Bei 250 MHz ist der $\lambda/2$-Mode erregt, bei 550 MHz und 850 MHz der $3\lambda/2$-Mode. Die Richtdiagramme von log-per. V-Antenne und korrespondierender log-per. Dipolantenne sind im $\lambda/2$-Mode nahezu gleich. Im $3\lambda/2$-Mode ist die Richtwirkung der log-per. V-Antenne wesentlich besser als bei der optimalen log-per. Dipolantenne.

Die weiteren Eigenschaften dieser Antenne, insbesondere das Impedanzverhalten, sind in den schon zitierten Arbeiten [57,1] ausführlich behandelt worden, so daß eine erneute Diskussion hier unterbleiben kann. Der Vollständigkeit halber soll lediglich die gemessene Widerstandsortskurve angegeben werden.(Abb.44).

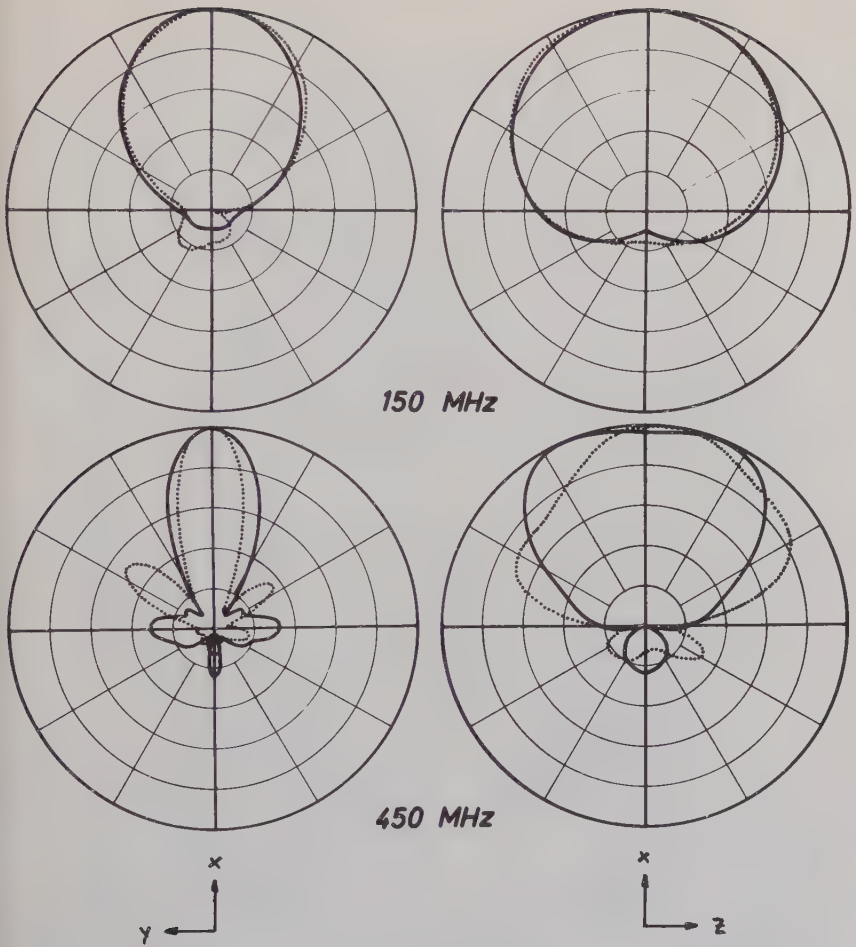

Abb. 42. Berechnete Richtdiagramme (—) in 5. Näherung und gemessene Richtdiagramme (· · ·) bei 150 MHz und 450 MHz für die log-per. V-Antenne mit den Parametern: $\tau = 0,9$, N=12, $Z_L = 52\Omega$, $h_1 = 750$ mm, $l_1 = 1375$ mm, $\varrho_{on} = 4$ mm, $\psi = 110^o$. Kartesisches Koordinatensystem wie in Abbildung 9.

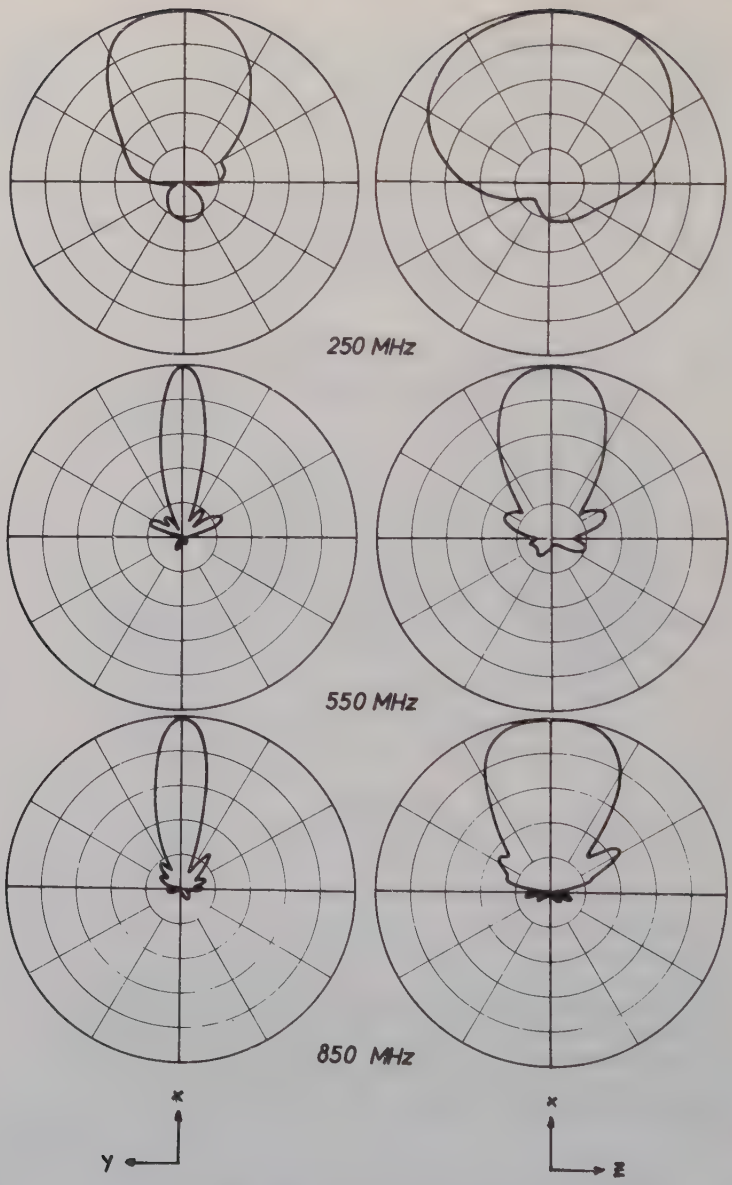

Abb. 43. Gemessene Richtdiagramme bei 250 MHz, 550 MHz und 850 MHz für die log-per. V-Antenne mit den Parametern: $\tau = 0,9$, N=12, $Z_L = 52\Omega$, $h_q = 750$ mm, $l_q = 1375$ mm, $\varrho_{on} = 4$ mm, $\psi = 110^o$. Kartesisches Koordinatensystem wie in Abbildung 9.

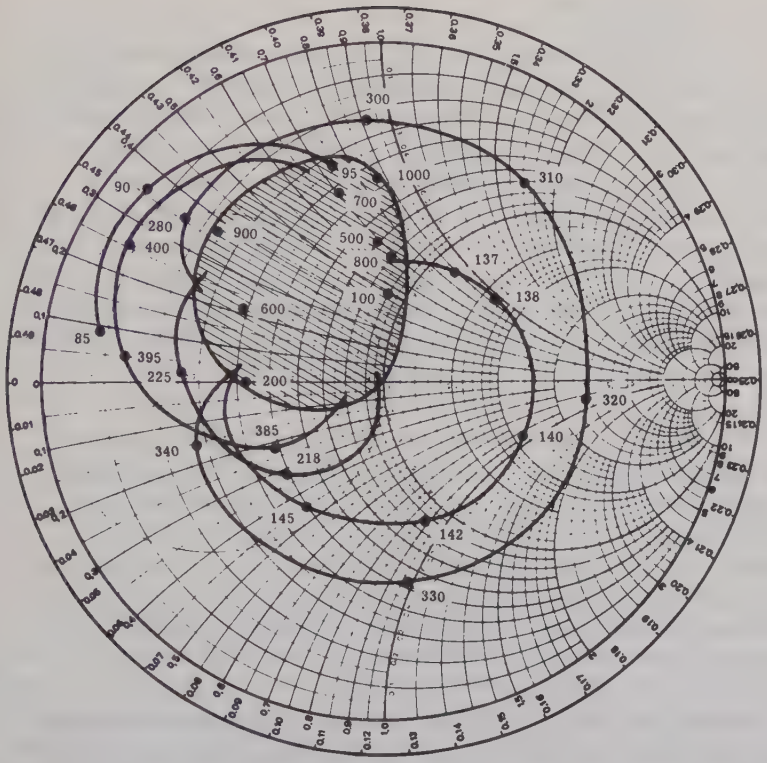

Abb. 44. Gemessene Widerstandsortskurve für die log-per. V-Antenne mit den Parametern: $\tau = 0,9$, N=12, $Z_L = 52\Omega$, $h_1 = 750$ mm, $l_1 = 1375$ mm, $g_{oh} = 4$ mm, $\Psi = 110^{o}$. Frequenzangaben in MHz. Die Mitte des Smith-Diagramms entspricht 60 Ω. Innerhalb des schraffierten Gebiets verlaufen die einzelnen Windungen der Widerstandsortskurve so gedrängt, dass eine zeichnerische Darstellung in allen Einzelheiten nicht möglich ist.

10. Zusammenfassung.

Eine strenge Feldtheorie der log-per. Dipolantenne ist hergeleitet und numerisch ausgewertet worden. Ein ausführlicher Vergleich der Rechenergebnisse mit den Meßwerten hat eine sehr gute Übereinstimmung ergeben. Die berechneten Richtdiagramme stimmen bereits in erster Näherung für die untere Hälfte des durch die spezielle Geometrie der Antenne gewählten Frequenzbereichs sehr gut mit den gemessenen Diagrammen überein. Der charakteristische Verlauf der Stromverteilung wird ebenfalls richtig wiedergegeben. Auch die berechneten Eingangswiderstände zeigen eine befriedigende Übereinstimmung mit den Messungen.

Mit Hilfe dieser Theorie lassen sich im Rahmen geeigneter Optimierungsverfahren optimale log-per. Dipolantennen gewinnen. Eine spezielle numerische Optimierung ist durchgeführt worden. Als Kriterien dienten hierbei die Halbwertsbreiten und die Vorrückverhältnisse der Richtdiagramme. Auf diese Weise wurde eine optimale log-per. Dipolantenne gefunden, deren durch die Rechnung bestimmte Eigenschaften experimentell bestätigt wurden.

Schließlich wurde eine Theorie zur angenäherten Berechnung des Fernfeldes der log-per. V-Antenne entwickelt. Damit wird es unter anderem möglich, den für beste Richtwirkung erforderlichen Öffnungswinkel der einzelnen V-förmigen Elemente rechnerisch zu bestimmen. Als besonders günstig hat sich hier eine 110°-V-Antenne erwiesen, die in zwei Schwingungsmoden betrieben werden kann, dem $\lambda/2$- und dem $3\lambda/2$-Mode, und die im $3\lambda/2$-Mode eine wesentlich größere Richtwirkung als eine vergleichbare log-per. Dipolantenne besitzt. Die Antenne läßt sich mit gutem Erfolg in einem Frequenzbereich von 100 MHz bis 900 MHz einsetzen. Durch den Betrieb in zwei Moden wird die Antenne gewissermaßen doppelt ausgenutzt, so daß sich außer der erhöhten Bündelung noch eine Vergrößerung der Bandbreite gegenüber der log-per. Dipolantenne als wesentlicher Vorteil ergibt.

Die Entwicklung der Theorie der log-per. Dipolantenne aus dem Randwertproblem und die Lösung mit Hilfe von Fourierreihen und Fourierintegralen bringt es mit sich, daß im Rahmen dieser Theorie eine Optimierung auf analytischem Wege sehr schwierig ist. Es läßt sich keine Extremalaufgabe explizit formulieren. Aus diesem Grund ist hier zunächst eine numerische Optimierung durchgeführt worden. Falls es gelingt, diese Schwierigkeit zu beheben und zumindest teilweise eine analytische Darstellung des Optimierungsproblems zu gewinnen, ist mit einem wesentlich geringeren numerischen Aufwand, also mit einem schnelleren und damit billigeren Algorithmus, zu rechnen.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Dozent Dr. S. Blume, möchte ich für die Überlassung des Themas, für seine Unterstützung sowie für die aus zahlreichen Gesprächen gewonnenen Anregungen recht herzlich danken. Ferner bin ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft, die für das Programm zur Entwicklung von Breitbandantennen großzügige Hilfe durch Bereitstellung umfangreicher Sachmittel geleistet hat, zu großem Dank verpflichtet. Herr Dipl.-Math. J. Radloff von der Zentralen Rechenanlage der Universität hat mich bei der Aufbereitung der numerischen Rechnungen für die TR4 in sehr dankenswerter Weise unterstützt.

Literaturverzeichnis.

[1] Blume,S. und J.Wolter: Theoretische und experimentelle Untersuchungen an logarithmisch periodischen Antennen. Z.angew.Phys.23 (1967) S.386-396.

[2] Bruce,E.;Beck,A.C.;Lowry,L.R.: Horizontal rhombic antennas. Proc.IRE 23 (1935) p.24.

[3] Harper,A.E.: Rhombic antenna design. New York D.van Nostrand 1941.

[4] Beverage,H.H.; Peterson,H.O.: Diversity receiving system of RCA Communications,Inc., for radio telegraphy. Proc.IRE 19 (1931) p.531-561.

[5] Hansen,W.W.; Woodyard,J.R.: A new principle in directional antenna design. Proc.IRE (1938) p.333-345.

[6] Grimm,R.: The comb antenna. Proc.IRE 36 (1948) p.359-362.

[7] Wolter,H.: Strahlungsdämpfung, Widerstände und Richtdiagramme von Überbreitbandantennen. Z.angew.Phys. 4 (1952) S.60-70. (Auszug aus Vortragsmanuskripten 1940/41).

[8] Schelkunoff,S.A.: Electromagnetic Waves. Van Nostrand, Princeton, New Jersey 1943.

[9] Schelkunoff,S.A.: Theory of antennas of arbitrary size and shape. Proc.IRE 29 (1941) p.493.

[10] Schelkunoff,S.A.; Friis,H.T.: Antennas, Theory and Practice. New York: John Wiley & Sons, London: Chapman & Hall 1952.

[11] Kandoian,A.G.: Three New Antenna Types and Their Applications. Proc.IRE 34 (1946) p.70-77.

[12] Chatterjee,J.S.: Radiation Field of a Conical Helix. J.Appl.Phys. 24 (1953) p.550.

[13] Chatterjee,J.S.: Radiation Characteristics of a Conical Helix of Low Pitch Angles. J.Appl.Phys.26 (1955) p.331-335.

[14] Kraus,J.D.: Helical Beam Antenna for Wide-Band Applications. Proc.IRE 36 (1948) p.1236.

[15] Kraus,J.D.: Antennas, New York: McGraw-Hill 1950.

[16] Meinke,H.: Ein neuer Weg zur Lösung des Problems der Breitbandantenne. Nachrichtentechn.Z. 10 (1957) S.594-601.

[17] Meinke,H.: Zylindersymmetrische Breitband-Rundstrahler mit Hochpaß-Anpassung. Nachrichtentechn.Z. 13 (1960) S.162-168.

[18] Wahsweiler,H.G.: Entwicklung optimaler Breitband-Rundstrahlantennen. Z.angew.Phys. 12 (1960) S.450.

[19] Arlt,G.: Untersuchungen an ebenen Flächendipolen und Dipolgruppen. Z.angew.Phys. 9 (1957) S.379.

[20] Blume,S.: Experimentelle und theoretische Untersuchungen an ebenen Flächenantennen. Z.angew.Phys.12 (1960) S.39 ff und S.72 ff.

[21] Blume,S.: Zur Theorie der Kegelantennen mit elliptischem Querschnitt. Z.angew.Phys. 16 (1963) S.220.

[22] Blume,S.: Kegelantenne mit elliptischem Querschnitt. Z.angew.Phys.17 (1964) S.80.

[23] Rumsey,V.H.: Frequency Independent Antennas. IRE Nat. Conv.Rec.,P.1 (1957) p.114-118.

[24] Dyson,J.D.: The Equiangular Spiral Antenna. Trans.IRE AP-7 (1959) Nr.2,p.181-187.

[25] Dyson,J.D.: The Non-Planar Equiangular Spiral Antenna. Proc. Eight Annual Symp. on the USAF Antenna Res. and Dev. Program, Robert Allerton Park, Monticello, Ill. (1958).

[26] Dyson,J.D.: The Unidirectional Equiangular Spiral Antenna. Trans.IRE AP-7 (1959) Nr.4,p.329-334.

[27] Curtis,W.L.: Spiral Antennas. Trans.IRE AP-8 (1960) Nr.3,p.298-306.

[28] Mayes,P.E.; Dyson,J.D.; Bawer,R.; Wolfe,J.I.: A Note on the Difference between Equiangular and Archimedes Spiral Antennas. Trans.IRE MTT-9 (1961) Nr.2,p.203-205.

[29] Dyson,J.D.; Mayes,P.E.: New Circulary-Polarized Frequency-Independent Antennas with Conical Beam or Omnidirectional Patterns. Trans.IRE AP-9 (1961) Nr.4, p.334-342.

[30] Dyson,J.D.: The Characteristics and Design of the Conical Log-Spiral Antenna. Trans.IEEE AP-12 (1964) Nr.5,p.488.

[31] Cathey,W.T.Jr.: Radiation Patterns of the Log-arithmic Spiral Antenna on a Elliptical Cone. Trans.IEEE AP-12 (1964) Nr.4,p.491.

[32] Tang,C.H.: A Class of Modified Log-Spiral Antennas. Trans.IEEE AP-11 (1963) p.422.

[33] Mast,P.E.: A Theoretical Study of Equiangular Spiral Antennas. Rep.No.35 Contr.AF33(616)-3220, Ant.Lab. Univ. of Ill. (1958), Ph.D.-Diss. p.1-57.

[34] Dyson,J.D.: The Design of conical log-spiral antennas. IEEE Intern.Conv.Rec.,P.8 (1964) p.1-15.

[35] Meinke,H.: Scimitarantennen. Nachrichtentechn.Z.12 (1967) S.693.

[36] Wohlleben,R.: Strahlungszonen- und Phasenzentrum der zweiarmigen, kegelförmigen, logarithmischen Spiral-antenne. Dr.-Ing.-Diss. Fak.f.Elektrotechn.TH Aachen (Juli 1968).

[37] DuHamel,R.H.; Isbell,D.E.: Broadband Logarithmically Periodic Antenna Structures. IRE Nat.Conv.Rec.,P.1 (1957) p.119-128.

[38] Booker,H.G.: Slot aerials and their relation to complementary wire aerials (Babinet-principle). J.I.E.E. (London) part IIIa, vol.93 (1946) p.620-626.

[39] Isbell,D.E.: Log-Periodic Dipole Arrays. Trans.IRE AP-8 (1960) Nr.3,p.260-267.

[40] Carrel,R.L.: The Design of Log-Periodic Dipole Antennas. IRE Nat.Conv.Rec.,P.1 (1961) p.61-75.

[41] Bell,R.L.: Broadband Log-Periodic Antennas. Electr. XXXIII (1960) p.58-59.

[42] Bell,R.L.; Elfving,C.T.; Franks,R.E.: Near-Field Measurements on a Logarithmically Periodic Antenna. Trans.IRE AP-8 (1960) Nr.6,p.559-567.

[43] Carrel,R.L.: Analysis and Design of the Log-Periodic Dipole Antenna. Rept. Nr.52, Univ. of Ill., Ant.Lab. Contr.AF33(616)-6079.

[44] DuHamel,R.H.; Berry,D.G.: Logarithmically Periodic Antenna Arrays. IRE Wescon Conv.Rec.,P.1 (1958) p.161-174.

[45] DuHamel,R.H.; Ore,F.R.: Logarithmically Periodic Antenna Design. IRE Nat.Conv.Rec.,P.1 (1958) p.139-151.

[46] Graf,C.R.: The Log-Periodic Antenna. Electronics World 63 (1960) Nr.5,p.100-101.

[47] Greif,R.: Logarithmisch periodische Antennen. Nachrichtentechn. Fachb.23 (1961) S.81-93.

[48] Mayes,P.E.; Deschamps,G.A.; Patton,W.T.: Backward-Wave Radiation from Periodic Structures and Application to the Design of Frequency Independent Antennas. Proc.IRE 49 (1961) p.962-963.

[49] Jordan,E.C.; Deschamps,G.A.; Dyson,J.D.; Mayes,P.E.: Developments in Broadband Antennas. IEEE Spectrum New York (April 1964) p.58-71.

[50] Isbell,D.E.: Non-Planar Logarithmically Periodic Antenna Structure. Rept.Nr.30, Univ. of Ill., Ant.Lab. (1958).

[51] Deschamps,G.A.; DuHamel,R.H.: Frequency Independent Antennas. Kap.18 in Antenna Engineering Handbook, Henry Jasik, New Yorkß McGraw-Hill Book Co.,Inc.,(1960).

[52] Mayes,P.E.: Broadband Backward Wave Antennas. Microwave J. 6 (1963) Nr.1, p.2.

[53] DuHamel,R.H.; Berry,D.G.: A New Concept in High Frequency Antenna Design. IRE Nat.Conv.Rec.7(1959)p.42.

[54] Kühn,R.: Mikrowellenantennen. VEB Verlag Technik Berlin 1964.

[55] Wolter,H.: Zu den Begriffen "Breitbandantennen" und "Optimalantennen", diskutiert am Beispiel der Falterantennen. Z.angew.Phys. 22 (1967) S.317-321.

[56] Mayes,P.E.; Carrel,R.L.: Log-Periodic Resonant-V-Arrays. Presented at Wescon, San Francisco, Calif.(1961).

[57] Wolter,J.: Experimentelle und Theoretische Untersuchungen zur Entwicklung kleiner logarithmisch periodischer Antennen mit hohem Gewinn. Phys.-Dipl.Inst.f.Angew.Phys. Marburg (1967).

[58] Chatterjee,J.S.; Roy,M.N.: Helical Log-Periodic Array. Trans.IEEE AP-16 (1968) Nr.5,p.592.

[59] Berry,D.G.; Ore,F.R.: Log-Periodic Monopole Antennas. IRE Nat.Conv.Rec.,P.1 (1961) p.76-85.

[60] Carr,J.W.: Some Variations in Log-Periodic Antenna Structures. Trans.IRE AP-9 (1961) Nr.2,p.229-230.

[61] Gillard,C.W.; Franks,R.E.: Frequency Independent Antennas, Several News and Undeveloped Ideas. Microwave J.4 (1961) Nr.2,p.67-72.

[62] Balmain,K.G.; Dyson,J.D.: The Series-Fed, Log-Periodic Folded Dipole Array. Digest IEEE PTG-AP Intern. Symp., Boulder, Colo. (1963) p.143-148.

[63] Ore,F.R.: Investigation of the Log-Periodic Coaxial Fed Monopole Array. Techn Note Nr.1, Univ. of Ill. Radiolocation Research Lab., Contr. NOBSR 85243 (1963).

[64] Schildheuer,F.: Impedanzverhalten logarithmisch periodischer Antennen mit linearer Polarisation. Dr.-Ing.-Diss. Fak.f. Maschinenwesen TH Braunschweig (1967).

[65] Rumsey,V.: Frequency Independent Antennas.1.Aufl. New York / London 1966.

[66] Zuhrt,H.: Eine strenge Berechnung der Dipolantennen mit rohrförmigem Querschnitt. Frequenz 4 (1950) S.135, 178.

[67] Zuhrt,H.: Elektromagnetische Strahlungsfelder. Berlin / Göttingen / Heidelberg 1953.

[68] Sommerfeld,A.: Partielle Differentialgleichungen der Physik. 2. Aufl. Leipzig 1947.

[69] Erdelyi,A.: Asymptotic Expansions. Dover, New York 1956.

[70] Magnus,W.; Oberhettinger,F.: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Berlin / Göttingen / Heidelberg: Springer 1948.

[71] Madelung,E.: Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. 6. Aufl. Berlin / Göttingen / Heidelberg : Springer 1957.

[72] Cheo,B.R-S.; Rumsey,V.H.; Welch,W.J.: A Solution to the Frequency Independent Antenna Problem. Trans.IRE 9 (1961) p.527.

[73] Ishimaru,A.; Tuan,H.S.: Theory of Frequency Scanning of Antennas. Trans.IRE 10 (1962) p.144.

[74] Mittra,R.; Jones,K.E.: Theoretical Brillouin (k-ß) Diagrams for Monopole and Dipole Arrays and their Application to Log-Periodic Antennas. Trans. IEEE 12 (1964) p.533-540.

[75] Stiefel,E.: Einführung in die numerische Mathematik. Stuttgart: B.G.Teubner 1965.

[76] Stiefel,E.: Altes und Neues über numerische Quadratur. ZAMM 41 (1961) S.408-413.

[77] Bauer,F.L.: La méthode d'integration numérique de Romberg. Colloque sur l'analyse numérique. Gauthier Villars,Paris 1961.

[78] Jahnke,E.; Emde,F.: Tafeln höherer Funktionen. 5.Aufl. Leipzig 1952.

[79] Müller,D.: Programmierung elektronischer Rechenanlagen. Mannheim 1965.

[80] Baumann,R.: ALGOL-Manual der ALCOR-Gruppe. Elektronische Rechenanlagen, Heft 5/6 (1961) und Heft 2 (1962).

[81] King,W.P.: The Theory of Linear Antennas. London 1956.

Lebenslauf

Am 16.3.1943 wurde ich in Neustadt/Holst. als Sohn des Wissenschaftlichen Mitarbeiters des Nachrichtenmittelversuchskommandos der Marine Dr.Hans Karl Hermann Wolter und seiner Ehefrau Edith Elisabeth Wolter, geb. Spieckermann, geboren. Von Ostern 1949 bis zum Umzug der Familie nach Kiel im Herbst 1949 besuchte ich die 1.Grundschulklasse der Neustädter Volksschule. In Kiel war ich zunächst Schüler der Gerhard-Schule, anschließend Schüler der Hardenberg-Schule. Im Frühjahr 1953 beendete ich nach bestandener Aufnahmeprüfung in die Sexta der Humboldt-Schule, Gymnasium für Jungen, den Volksschulbesuch. Von Ostern 1953 bis zum Herbst 1956 war ich Schüler dieser Anstalt. Nachdem mein Vater einen an ihn ergangenen Ruf auf den Lehrstuhl für Angewandte Physik an der Philipps-Universität Marburg angenommen hatte, zogen wir im Herbst 1956 nach Marburg. Hier besuchte ich bis zum Abitur am 2.3.1962 das Realgymnasium, das später in Martin-Luther-Schule umbenannt wurde.

Seit dem Sommer-Semester 1962 studierte ich das Fach Physik an der Philipps-Universität. Die Diplomvorprüfung legte ich hier am 29.2.1964 ab. Vom April 1966 bis zum Juli 1966 war ich am Mathematischen Institut bei Herrn Prof. Peyerimhoff und vom November 1966 bis Januar 1968 am Institut für Angewandte Physik als Wissenschaftliche Hilfskraft angestellt. Die Diplom-Hauptprüfung legte ich am 13.7.1967 ab. Seit dem 1.1.1968 arbeite ich unter der Leitung von Herrn Doz.Dr.S.Blume mit Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft als Wissenschaftliche Hilfskraft im Institut für Angewandte Physik an Untersuchungen über logarithmisch periodische Breitbandantennen.